9 КОП.

Индекс
70072

Новые серии
научно-популярных брошюр

1. **Радиоэлектроника и связь.** Индекс 70091.

Брошюры этой серии охватывают широкий круг проблем современной электроники, рассказывают о всем новом, что характерно для передового фронта этой области техники.

В то же время, поскольку брошюры рассчитаны не только на специалистов, в них объясняются физические, математические и химические основы действия современных приборов, даются справочные сведения о приложениях электроники.

В 1966 году выйдут следующие работы:

«Лазеры сегодня и завтра», «Искусственные спутники Земли и радиосвязь», «Можно ли моделировать мозг?», «Помехоустойчивость, надежность, кибернетика», «Кристалл вместо лампы», «Машина распознает образы», «Радиолокация планет», «Цветное телевидение», «Что такое бионика» и др.

2. **Наука о Земле.** Индекс 70090.

В серии выпускаются работы о новейших достижениях географии, геологии, океанологии и других наук, изучающих нашу планету. Среди авторов — ведущие советские и зарубежные ученые.

В 1966 году читатели получат следующие брошюры: Щербаков Д. И., Сидоренко А. В. «Актуальные проблемы науки»; Бломберг Р. «Змеи-гиганты и страшные ящеры» (перевод со шведского); Варенцов М. И., Рябухин Г. Е. «Месторождения-гиганты»; Муромцев А. М. «Исследования Мирового океана»; Погосян Х. П. «Новое в изучении атмосферы»; Банников А. Г. «Заповедники СССР»; Анучин В. А. «Природа и общество» и др.

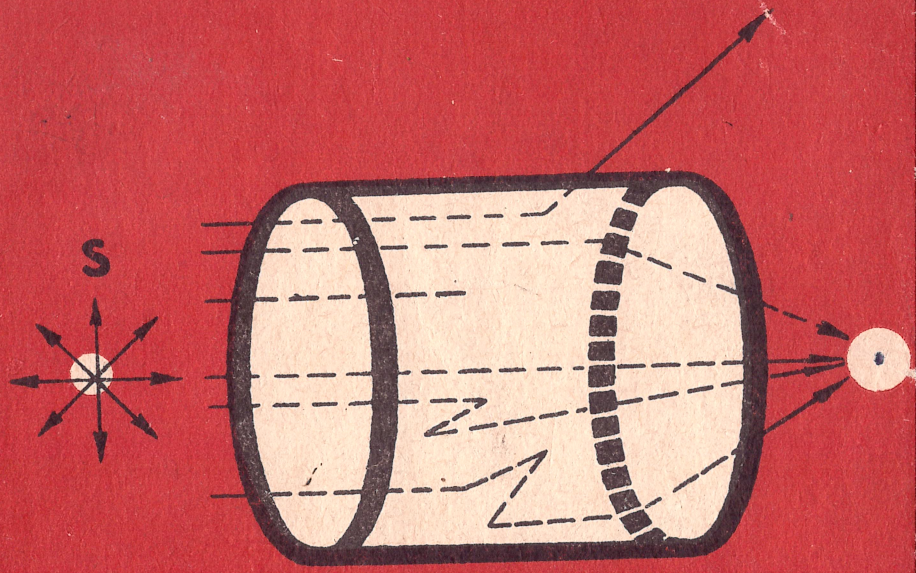
Любую брошюру можно предварительно заказать в ближайшем книжном магазине по аннотированному тематическому плану издательства.

Тот, кто хочет получать брошюры регулярно, из номера в номер, может подписаться на них в почтовом отделении или у общественного распространителя печати по месту работы.

Подписная цена на одну серию:
с 1 апреля до конца года — 81 коп.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ЗНАНИЕ»

Серия 9 Физика Математика Астрономия 1966



Б. В. Новожилов

Метод Монте-Карло

3

Новое в жизни науке технике

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Числа и буквы	3
Вероятности. Их сложение и умножение	8
Метод статистических испытаний	11
Защита от гамма-излучения	19
Применения метода Монте-Карло	31
Техника метода	45

БОРИС ВАСИЛЬЕВИЧ НОВОЖИЛОВ

Редактор *И. Б. Файнбойм*
Худож. редактор *Е. Е. Соколов*
Техн. редактор *М. Т. Перегудова*
Корректор *Р. С. Колокольчикова*
Обложка *А. Г. Ординарцева*

Сдано в набор 7/XII 1965 г. Подп. к печ. 4/I 1966 г.
Изд. № 28. Формат бум. 60×90¹/₁₆. Бум. л. 1,5.
Печ. л. 3,0. Уч.-изд. л. 2,75. А 00504. Цена 9 коп.
Тираж 82 900 экз. Зак. 4279.
Опубликовано тем. план 1966 г. № 210.
Издательство «Знание».
Москва, Центр, Новая пл., д. 3/4.

Типография изд-ва «Знание».
Москва, Центр, Новая пл., д. 3/4.

Б. В. НОВОЖИЛОВ,
кандидат физико-математических наук

МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ЗНАНИЕ»
Москва 1966

518
Н74

$e = 2{,}71828...$ Построим ряд чисел ne, где $n = 1, 2, 3, 4, ...$, т. е. 2,71828... 5,43656... 8,15484... 10,87312... 13,59140... Выпишем теперь первые четыре знака после запятой. Тогда получим

$$a_1 = 7182,\ a_2 = 4365,\ a_3 = 1548,\ a_4 = 8731,\ a_5 = 5914.$$

Продолжая этот процесс далее, можно получить сколько угодно четырехзначных чисел, равномерно распределенных в интервале от 0001 до 9999. Если бы мы взяли любое рациональное число, то, начиная с некоторого n, числа стали бы повторяться. Для иррациональных чисел ряд бесконечен. Правда, числа, получаемые таким или подобным способами, не являются настоящими случайными числами — догадливый человек может определить, по какому закону составлен ряд a_n. Однако, как показывает опыт, набор таких псевдослучайных чисел достаточен для проведения расчетов методом статистических испытаний. В то же время генерирование их требует небольшой загрузки машинной памяти — машина должна помнить лишь закон получения чисел.

Иногда прибегают к физическому генерированию случайных чисел. Для этого электронносчетные машины снабжаются приставками, задача которых — подавать в машину поток электрических импульсов, случайно распределенных по времени. В качестве датчика импульсов могут быть использованы приборы, физические процессы в которых протекают по вероятностным законам, например шумы в радиосхемах, распад радиоактивных ядер и т. п.

Графики и таблицы, необходимые при ручном счете, заменяются функциональными зависимостями, вводимыми в память машины. Последовательность розыгрыша отдельных элементарных актов и порядок проведения промежуточных расчетов задаются машине в виде программы.

Таким образом, при расчетах по методу Монте-Карло на быстродействующих электронных вычислительных машинах удается автоматизировать весь процесс решения задачи — от получения случайных чисел до выведения из машины результатов в виде таблиц.

Сфера применения метода статистических испытаний постоянно увеличивается. Можно не сомневаться, что этот мощный метод вычислительной математики в ближайшем будущем поможет решить много важных и интересных проблем.

ходимых испытаний быстро увеличивается при попытке сделать расчеты более точными.

Особенно громоздкими являются задачи, где часть случайных испытаний оказывается бесполезной. Так, при расчете проникновения квантов или нейтронов через толстые пластины вещества большинство частиц поглощается внутри пластины. Пусть число прошедших частиц составляет сотую часть от числа падающих на пластину, тогда лишь одно испытание из ста будет полезным, т. е. принесет нам какую-то информацию о частице, прошедшей через барьер. Так как N в нашей формуле — число полезных испытаний, то общее число испытаний должно быть в сто раз большим, чем рассчитанное по этой формуле.

Такое положение дел приводит к тому, что возможность применения описанных выше методов ручного счета при решении сложных задач совершенно исключается. Без использования электронносчетных машин метод статистических испытаний может быть полезен только для расчета небольшого количества траекторий. В первые годы после открытия метода таким образом были решены некоторые простые задачи, не требующие слишком большого числа испытаний. Например, при помощи ручного счета были исследованы каскадные процессы, возникающие при попадании протонов высокой энергии в ядра урана. Число исследованных траекторий при этом не превышало нескольких десятков. Точность расчета была невелика, так как существенное ее увеличение требовало огромных затрат труда и времени.

Применение электронных вычислительных машин, совершающих десятки и сотни тысяч операций в секунду, позволяет применить метод Монте-Карло и в задачах с очень большим количеством испытаний. При этом отпадает, конечно, надобность в трудоемких, занимающих много времени операциях, которые характерны для ручного счета.

Таблицы случайных чисел могут быть введены в ячейки памяти машины. Однако такой способ применяется довольно редко. Память машины должна расходоваться чрезвычайно экономно, так как в процессе счета ячейки памяти бывают сильно загружены различного рода информацией, относящейся к самому исследуемому процессу. Поэтому дополнительное введение в память таблиц случайных чисел нецелесообразно. Случайные числа обычно генерируются самой машиной по некоторой программе. Наиболее часто применяются так называемые рекуррентные соотношения, которые позволяют найти случайное число a_n по одному или нескольким предыдущим a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3} и т. д. Приведем простой пример. Возьмем какое-нибудь иррациональное число, т. е. такое число, которое не может быть представлено обыкновенной дробью. Остановимся хотя бы на основании натуральных логарифмов — числе

ЧИСЛА И БУКВЫ

Изучение математики в средней школе начинается с арифметики. Школьники начальных классов производят действия только над числами — либо отвлеченными (в примерах), либо именованными — при решении задач. Приступив к основам алгебры, учащиеся быстро понимают преимущество буквенных обозначений. Оказывается, однотипные арифметические задачи удобнее решать, используя вместо чисел буквы. Алгебра как наука и возникла в результате поисков общих методов решения похожих друг на друга арифметических задач.

Рассмотрим простой пример. Довольно часто при решении задач встречается квадратное уравнение $x^2 + 2bx + c = 0$. Нужно определить неизвестную величину x, которая удовлетворяла бы написанному соотношению (b и c — некоторые числа). Ясно, что если мы сможем выразить корни этого уравнения (т. е. те значения x, подстановка которых в уравнение обращает ее левую часть в ноль) через буквы b и c, то сразу будут решены все арифметические задачи, приводящие к такому уравнению. Действительно, в школьном курсе алгебры показано, что

$$x_1 = -b + \sqrt{b^2 - c} \quad \text{и} \quad x_2 = -b - \sqrt{b^2 - c}$$

являются решениями этого уравнения. Теперь, имея эти выражения, мы можем вычислить корни любого квадратного уравнения с определенными численными коэффициентами b и c только при помощи арифметических действий и таблиц квадратных корней.

Другой пример. Все знают, как найти одну сторону прямоугольного треугольника по двум другим его сторонам. Для этого нужно вспомнить теорему Пифагора: квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. И хотя многие из нас сразу же после экзамена по геометрии забыли доказательство этой теоремы, никаких трудностей мы не испытываем. Вспомнив простую формулу $c^2 = a^2 + b^2$, справедливую для всех прямоугольных треугольников, всегда можно подставить вместо a и b численное значение катетов интересующего нас треугольника и получить численный ответ для гипотенузы.

Таким образом, типичные задачи могут быть решены только один раз. После этого можно, забыв сам метод решения, получать ответы для любых задач, относящихся к данному типу, зная лишь ответ в буквенных обозначениях.

Было бы очень заманчиво научиться решать все задачи в буквах. Тогда, имея буквенные ответы, мы могли бы получать решения конкретных задач, пользуясь только четырьмя действиями арифметики и некоторыми таблицами (например, таблицами квадратных корней или логарифмов). К сожалению, на практике в редких случаях удается получить буквенное решение, приходится гораздо раньше, чем получен окончательный ответ, переходить к числам.

Возьмем опять пример из алгебры. Алгебраические уравнения выше четвертой степени уже не имеют такого простого решения, как квадратное. Более того, доказано, что и искать ответ в буквенных обозначениях нет смысла — его просто не существует. В каждом конкретном случае уравнение нужно решать заново, используя заданные значения коэффициентов. Корни уравнения $x^6 + bx^2 + x - 1 = 0$ нельзя выразить в виде некоторой формулы, в которую входил бы коэффициент b. Нужно знать его значение и после этого тем или иным способом искать значения x, при которых левая часть равна нулю. Пускай $b = -3$. Тогда, перебирая значения x, скажем, через 0,01, и вычисляя левую часть при этих значениях, можно найти величину корней. Чем чаще мы будем брать пробные величины x, тем точнее найдем корни. Таким образом, для уравнения $x^6 - 3x^2 + x - 1 = 0$ можно получить $x_1 = 1{,}29$, $x_2 = -1{,}43$ (кроме того, имеются четыре комплексных корня). Если изменить величину коэффициента b, то всю процедуру придется провести заново.

Другим примером подобного типа является уравнение $bx = \cos x$. Опять для того, чтобы найти то значение x, при котором правая часть равна левой, нужно сначала задать конкретное значение b. Если $b = 1$, то, пользуясь таблицами косинусов, можно найти $x = 0{,}739$.

Ясно, что таких нерешаемых в буквах уравнений можно написать сколько угодно. Конечно, некоторые из них встречаются при решении задач очень часто. Например, с уравнением $\operatorname{tg} x = bx$ встречается каждый студент-физик. В таком случае удобно иметь уже готовые таблицы корней уравнения для разных значений b. Таблицы корней этого уравнения, как и многих других, существуют, и ими широко пользуются. Однако на все случаи жизни таблицы составить невозможно, поэтому задача выполнения численных расчетов остается. Решением этой задачи и занимается раздел математики, называемый вычислительной математикой.

Конечно, численные расчеты нужны не только для того, чтобы находить корни алгебраических или трансцендентных

точно очевидна. Методом Монте-Карло, в частности, получены ценные результаты в теории передачи сообщений. Решение многочисленных задач теории обнаружения полезных сигналов на фоне статистических помех, возникающих в приемнике, передатчике и каналах связи, требует оценки многомерных интегралов, что и делается при помощи метода статистических испытаний.

Таким образом, классическая задача вычисления интегралов, не связываемая обычно с теорией вероятности, может быть переформулирована так, что к ней становится применим метод Монте-Карло. Это же относится к некоторым другим математическим проблемам, например решению дифференциальных уравнений, исследованию сложных систем алгебраических уравнений первой степени и т. д. Свежая струя, внесенная методом статистических испытаний в старые, классические разделы математики, делает его еще более ценным и привлекательным.

ТЕХНИКА МЕТОДА

Первый вопрос, который возникает при использовании метода Монте-Карло, связан с количеством испытаний, необходимых для решения задачи с заданной точностью. Из сказанного выше ясно, что точность ответа повышается с увеличением числа испытаний. Ожидаемая ошибка может быть вычислена на основе теории вероятностей. Мы не будем останавливаться на этом вопросе, укажем лишь, что ее относительная величина (т. е. отношение ошибки к самой определяемой величине) обратно пропорциональна квадратному корню из числа испытаний. Иными словами, если мы исследовали N случайных процессов (например, траекторий частиц) для определения интересующей нас величины A, то последняя будет получена с ошибкой ΔA, наиболее вероятное значение которой определяется из соотношения

$$\frac{\Delta A}{A} \approx \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

Например, для вычисления числа π мы использовали 150 точек и получили $\pi = 3{,}4$. Этот результат получен с точностью $\Delta\pi = 3{,}4/\sqrt{150} = 0{,}28$. Таким образом, определенное нами число π должно быть записано в виде $\pi = 3{,}4 \pm 0{,}3$. Точное значение $\pi = 3{,}14...$, как и должно быть, лежит внутри указанного интервала ошибок.

Приведенная формула позволяет найти и количество испытаний, нужных для получения величины с заданной точностью. Оно равно $N = A^2/(\Delta A)^2$. Чтобы получить π с точностью до одной сотой, нужно, следовательно, $N = 3^2/(0{,}01)^2$, т. е. около ста тысяч испытаний. Таким образом, число необ-

ружи при обратном неравенстве. Таким образом можно вычислять не только объемы и площади, но и другие характеристики двумерных и трехмерных тел, например массу и положение центра тяжести тела по заданному распределению плотности в его объеме, суммарный заряд неравномерно заряженного тела, площадь поверхности тела и т. п. Классическая математика сводит задачи такого рода к вычислению интегралов, т. е. бесконечным суммам бесконечно малых величин.

В нашей обыденной жизни мы встречаемся только с трехмерными телами — это следствие трехмерности пространства, в котором мы живем. Однако формально можно построить пространство и большего числа измерений, например четырехмерное, заполненное точками, двумерными, трехмерными и четырехмерными объектами. Наглядно представить такое пространство, конечно, невозможно, для этого ведь нужно вообразить себе четыре взаимно перпендикулярных направления! А для нашего мышления, привыкшего к трехмерному миру, это непосильная задача. Формальное же описание четырехмерного пространства не представляет трудностей. Положение точки в нем характеризуется четырьмя числами, соответствующими четырем координатным осям x_1, x_2, x_3 и x_4.

Построение и изучение многомерных пространств и объектов не является никому не нужной игрой воображения. Рассмотрение многих задач математики, физики и других наук часто приводит к необходимости использования пространств более чем трех измерений. При этом возникают вопросы, связанные с вычислением многомерных интегралов, т. е. величин, аналогичных длинам, площадям, объемам, но в пространстве большего числа измерений. В частности, в теории относительности рассматривается четырехмерное пространство, три направления которого соответствуют обычным измерениям нашего пространства — длине, ширине и высоте, а по четвертой оси откладывается время. Введение такого пространства — не просто удобный формальный прием, а имеет под собой глубокое физическое обоснование. Как было показано Эйнштейном, пространство и время связаны друг с другом, и их совместное рассмотрение не только возможно, но и необходимо.

Ряд задач квантовой физики, теории элементарных частиц, теории вероятности, статистической физики часто также могут быть решены только после вычисления некоторых многомерных, а иногда даже так называемых континуальных интегралов, т. е. интегралов в пространстве бесконечного числа измерений.

Оказывается, что вычисление многомерных интегралов очень удобно производить при помощи метода статистических испытаний. Схема расчета их отличается от того простого случая, который мы рассмотрели, но возможность его доста-

уравнений. На простых примерах из области элементарной математики мы хотели лишь показать, что ответы на многие задачи могут быть получены только после выполнения большого количества трудоемких действий над числами.

В высшей математике положение аналогичное, но задачи, стоящие перед вычислительной математикой, значительно усложняются. Дело в том, что в большинстве случаев результатами решения здесь являются не числа, а функции. Читатели, не знакомые с этим понятием, легко уяснят себе, что́ такое функция, на следующем примере.

Все знают, что давление атмосферного воздуха уменьшается с высотой — на высоте 4—5 *км* над уровнем моря давление уже в 2 раза меньше нормального. Попробуем найти зависимость давления от высоты, или давление как функцию высоты. Другими словами, мы должны указать способ, при помощи которого по заданной высоте можно вычислить давление воздуха на этой высоте. Кратко эта зависимость записывается в виде $p = f(h)$, где p — давление, h — высота, а буква f показывает, что p есть функция h. Еще более краткая запись — $p(h)$, т. е. давление зависит от высоты.

Рассмотрим столб воздуха сечением 1 $см^2$. Давление на высоте $h + \Delta h$ будет отличаться от давления на высоте h на величину веса слоя воздуха толщиной Δh, т. е. на $\rho g \Delta h$, где ρ — плотность воздуха, а g — ускорение силы тяжести (g будем считать постоянным, так как его изменение в пределах атмосферы мало). Таким образом, имеем

$$p(h) - p(h + \Delta h) = \rho g \Delta h.$$

Вспомнив, что плотность воздуха ρ сама зависит от давления

$$\rho = p\mu/RT,$$

где μ — молекулярный вес воздуха, R — газовая постоянная, а T — абсолютная температура, найдем

$$\Delta p = -p\mu g \Delta h/RT.$$

Имея эту связь, мы можем шаг за шагом последовательно находить давление на все больших и больших высотах. Начнем с высоты $h = 0$, т. е. с уровня моря. Приняв здесь давление равным $p(0) = 760$ *мм* ртутного столба, найдем величину $p(0)\mu g/RT$, а следовательно, и изменение давления при переходе от высоты $h = 0$ к высоте Δh. Затем таким же образом можно найти значения давления на высотах $2\Delta h$, $3\Delta h$ и т. д., причем в левую часть нужно все время подставлять давление, полученное при предыдущем шаге.

Конечно, шаги по высоте не должны быть большими — ведь при составлении уравнения мы считали, что плотность воздуха, а следовательно, и его давление в слое высотой Δh постоянны. Чем меньше мы будем брать шаг, тем точнее бу-

дут полученные результаты. Если перейти на точный язык математики, то следует сказать, что выражение

$$\frac{\Delta p}{\Delta h} = -p\,\frac{\mu g}{RT}$$

справедливо, когда выбранная нами высота элементарного столба Δh стремится к нулю (это записывается в виде $\Delta h \to 0$). Изменение давления Δp тоже, конечно, будет стремиться к нулю, однако отношение $\Delta p/\Delta h$ будет конечной величиной. (Полная аналогия с определением мгновенной скорости как предела отношения пути, проходимого за время Δt, когда Δt стремится к нулю).

Уравнения, содержащие отношение двух величин, каждая из которых стремится к нулю, называются дифференциальными (от латинского слова differentia — разность). Решения их не числа, а функции, в нашем случае функция $p(h)$. О решении дифференциальных уравнений можно сказать то же самое, что и о решении алгебраических уравнений. Есть уравнения хорошо изученные, их решения — известные функции, для которых составлены подробные таблицы. Наоборот, сплошь и рядом встречаются уравнения, решения которых не выражаются через табулированные функции, а следовательно, поставленная задача может быть решена только численными методами.

Рассматриваемая нами задача привела к очень простому уравнению. Скорость изменения давления с высотой оказалась пропорциональной самому давлению. Уравнения такого типа очень часто встречаются в различных науках. Это связано с тем, что многие процессы и явления в природе происходят так, что скорость изменения какой-либо величины пропорциональна самой величине. Число распадающихся радиоактивных ядер за некоторый промежуток времени пропорционально их количеству, а это значит, что скорость убывания радиоактивного вещества будет тоже пропорциональна его количеству. Уменьшение интенсивности света, проходящего через поглощающую среду, пропорционально интенсивности света. Скорость изменения электрического тока со временем в цепи, состоящей из конденсатора и сопротивления, пропорциональна току. Рост колоний бактерий, скорость некоторых химических реакций, развитие взрыва во времени — все это примеры процессов, описывающихся дифференциальными уравнениями, похожими на уравнение для давления атмосферного воздуха.

Не удивительно поэтому, что этот тип уравнений хорошо изучен и функция, удовлетворяющая ему, затабулирована. Она называется экспонентной и обозначается $expx$ или e^x. Решение рассмотренной нами задачи будет иметь вид

На рис. 10 нанесены случайные точки, отвечающие этим координатам — внутрь круга не попали всего четыре точки (третья, пятая, седьмая и двенадцатая). Попробуем грубо подсчитать площадь четверти круга. Она будет равна отношению числа точек, лежащих внутри него, к полному их числу, т. е. $11/15 = 0{,}73$. Точное значение площади $\pi/4 = 0{,}79$. Иначе говоря, даже при использовании всего 15 точек мы можем довольно сносно определить площадь круга. Эту же задачу можно рассматривать как приближенное определение числа π. Для него получаем $\pi = 0{,}73 \times 4 = 2{,}9$ с ошибкой около 10%. Нанося на наш чертеж все большее и большее число точек, мы будем в состоянии подойти к точному значению иррационального числа π с какой угодно точностью. Этот пример, на наш взгляд, достаточно хорошо иллюстрирует богатые возможности таблицы случайных чисел.

Вообще-то чертеж рисовать необязательно. Есть простой критерий, по которому можно установить, попадает ли случайное число внутрь круга или нет. Если x и y — координаты точки, то при $x^2 + y^2 > 1$ точка лежит вне круга, так как сумма квадратов координат есть не что иное, как расстояние точки от центра круга, а радиус круга единица. Координаты точек, попадающих на границу круга, удовлетворяют соотношение $x^2 + y^2 = 1$. Внутри круга лежат точки с суммой квадратов координат меньшей единицы. Пользуясь этими соображениями, легко подсчитать, что из 150 точек, соответствующих всем числам нашей таблицы, 129 будут внутри круга. Для π получаем значение 3,4.

Аналогичным образом можно вычислить и площадь любой другой фигуры. Конечно, применение метода Монте-Карло для решения столь простых задач не является целесообразным — есть, как уже говорилось ранее, более мощные и хорошо разработанные способы вычисления площадей фигур. Этот пример нужен лишь для пояснения методики применения метода статистических испытаний к нахождению так называемых многомерных интегралов.

Любая плоская фигура имеет два измерения, соответствующие двум координатным осям x и y. При изучении пространственных тел нам нужна уже третья ось—ось z, перпендикулярная плоскости xy. Очевидно, определение объема трехмерного тела можно проводить тем же способом, что и вычисление площади. Поместим интересующее нас тело в куб и заполним его объем равномерно распределенными случайными числами. Отношение объема тела к объему куба определяется отношением числа точек, находящихся в теле, к полному числу точек. Положение точки характеризуется тремя координатами, поэтому каждой точке нужно сопоставить тройку случайных чисел. В случае шара единичного радиуса точка попадает внутрь его, если $x^2 + y^2 + z^2 < 1$, и находится сна-

так как попадание капель в различные места чертежа равновероятно. Этот эксперимент аналогичен взвешиванию фигур, но, конечно, дает меньшую точность.

Теперь заменим дождь таблицей случайных чисел. Каждому следу капли можно сопоставить два случайных числа,

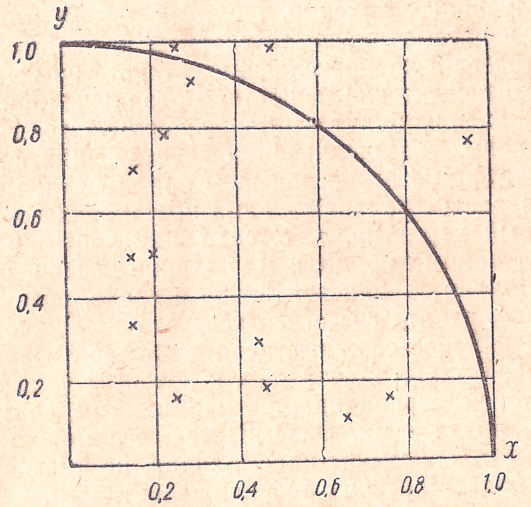


Рис. 10. Набор случайных точек, используемых для вычисления площади круга методом статистических испытаний.

характеризующих его положение вдоль осей x и y. Пары чисел можно выбирать из таблицы в каком-либо порядке, например подряд. Первое четырехзначное случайное число в таблице (стр. 16) 3590. Из него можно приготовить пару двухзначных чисел, каждое из которых больше нуля и меньше единицы, разбив его пополам и приписав нули спереди. Первое из них будем считать абсциссой следа капли, второе ординатой. Таким образом, координаты первого следа капли есть $x_1 = 0{,}35$ и $y_1 = 0{,}90$. Аналогично поступаем и со всеми остальными случайными числами в таблице. Координаты пятнадцати капель, соответствующих первому столбцу случайных чисел, будут:

№	x	y	№	x	y	№	x	y
1	0,35	0,90	6	0,14	0,34	11	0,46	0,19
2	0,21	0,51	7	0,25	0,97	12	0,70	0,86
3	0,48	0,99	8	0,77	0,15	13	0,17	0,48
4	0,64	0,10	9	0,44	0,30	14	0,26	0,79
5	0,96	0,79	10	0,17	0,68	15	0,23	0,15

$$p(h) = p(0)\exp(-\mu gh/RT).$$

Для получения численного ответа нам не нужно теперь последовательно двигаться малыми шагами к интересующей нас высоте — достаточно иметь таблицу экспоненциальной функции, а за неимением ее можно просто возвести число $e = 2{,}72$ в степень $-\mu gh/RT$, что легко проделывается при помощи таблицы логарифмов.

Что же делать, если полученное нами уравнение не принадлежит ни к одному из известных типов уравнений? Например, если бы мы усложнили нашу задачу и захотели учесть изменение температуры и молекулярного веса воздуха с высотой, то возникли бы уравнения гораздо более сложные. Есть, конечно, слабая надежда на то, что в какой-либо другой области науки аналогичные уравнения уже встречались и их удалось решить. Поэтому нам следует обратиться к справочнику по дифференциальным уравнениям, в которых собраны все типы уравнений, сводящихся к решаемым в известных функциях. Однако, как показывает опыт, успех такого предприятия маловероятен. Остается один путь — путь численного решения уравнения, который мы наметили выше. Беря достаточно малые изменения аргумента (т. е. той величины, от которой зависит функция), можно последовательно, шаг за шагом, восстановить функцию. Даже для простых уравнений точный расчет функций занимает много времени — нужно «шагать» очень часто, чтобы получить достаточно точное решение. А ведь встречаются уравнения для функций, зависящих не от одной, а от двух и более переменных. Это сразу во много раз увеличивает объем численных расчетов. Кроме того, так же как и в алгебре, при решении многих задач мы сталкиваемся с системами уравнений для нескольких функций. Численное интегрирование (т. е. решение) таких уравнений может оказаться не под силу даже большому вычислительному бюро.

Такое положение вещей и привело к бурному развитию вычислительной математики. До второй мировой войны математическая техника была представлена арифмометрами и ручными счетными машинами. Во время и после войны появились электронные вычислительные машины, способные совершать десятки тысяч арифметических действий в секунду. На машинах были получены численные решения многих задач физики, химии, техники, экономики, ранее считавшихся неразрешимыми (не принципиально, а технически — уж очень большое число арифметических операций нужно было сделать для того, чтобы получить ответ).

В этом введении, цель которого — показать необходимость численных методов в математике, мы ограничились лишь примерами из области алгебраических, трансцендентных и

простейших дифференциальных уравнений. На самом деле есть еще гораздо более сложные задачи, требующие численного счета. Мы не будем касаться этого вопроса, хотя бы просто потому, что одно объяснение терминов и символов заняло бы слишком много времени и места.

Очевидно одно: численные методы необходимы. Цель этой книжки — познакомить читателей с одним из наиболее мощных из них — методом Монте-Карло.

Монте-Карло — один из трех городов, образующих карликовое княжество Монако (площадь его всего 1,5 $км^2$) на побережье Средиземного моря. Этот город знаменит своим игорным домом, существующим уже более ста лет. Численный метод, о котором мы хотим рассказать, назван так потому, что элемент случайности, характерный для азартных игр типа рулетки, — неотъемлемая часть метода Монте-Карло.

Закономерностями случайных величин занимается специальный раздел математики, называемый теорией вероятностей. Поэтому знакомству с методом Монте-Карло мы предпошлем краткое введение, посвященное элементам этой теории. Мы упомянем лишь то, что будет необходимо для понимания дальнейшего материала [1].

ВЕРОЯТНОСТИ. ИХ СЛОЖЕНИЕ И УМНОЖЕНИЕ

С понятием вероятности мы очень часто встречаемся в нашей обыденной жизни. Основные элементы теории вероятностей можно пояснить просто на примере текста этой книги. Если взять наугад отрывок, содержащий тысячу знаков (включая и пробелы между словами), и подсчитать количество различных букв в этом отрывке, то мы увидим, что некоторые из них, например *о, а, т,* встречаются очень часто, другие — *ц, э, ф,* наоборот, редко. Можно сказать, что вероятность встретить букву *т* в выбранном отрывке больше вероятности найти букву *э*. От такого качественного определения перейдем к количественному. Для этого поделим число интересующих нас букв в отрывке на полное число знаков (тысяча). Это частное и будет количественной мерой вероятности. Если, скажем, буква *т* встретилась нам 23 раза, то вероятность появления ее в русском тексте близка к 0,023. Наиболее распространенный знак — пробел между словами. Его вероятность 0,175. Реже всего встречаются буквы *э* и *ф*: по два раза на тысячу знаков — их вероятность 0,002.

Конечно, от отрывка к отрывку эти числа могут изменяться. Например, буква *у* в одном из отрывков может встретить-

[1] Читатель, желающий получить более основательные сведения по теории вероятностей, может воспользоваться книжкой Б. В. Гнеденко и А. Я. Хинчина «Элементарное введение в теорию вероятностей».

прикладных задач. Оказывается, что множество задач такого рода может быть решено методом Монте-Карло. Читатель, видимо, уже не нуждается в детальном объяснении возможности применения метода статистических испытаний к таким вопросам. Рассматриваемые задачи относятся все к тому же типу процессов, характеризующихся наличием большого количества случайных явлений. Поэтому всегда можно придумать модель рассматриваемой системы и сформировать случайный поток заявок, поступающих в систему. Очевидно, что подобные статистические испытания различных систем массового обслуживания будут иметь решающую роль при проектировании новых и модернизации действующих предприятий.

Все приведенные выше примеры приложения метода Монте-Карло связаны с задачами, сама постановка которых носит вероятностный характер, т. е. содержит явным образом тот или иной случайный процесс. Блуждание частиц, распространение гамма-квантов или нейтронов в среде, развитие космического ливня, работа системы массового обслуживания — все это более или менее сложные цепи последовательных случайных событий. Однако круг задач, к которым применим метод Монте-Карло, не ограничивается проблемами, связанными со случайными процессами. Оказывается, его можно с успехом использовать и в большом классе задач, не имеющих в своей постановке никакой связи с теорией вероятности.

Начнем с простого примера. Каждый знает, как вычислить площадь круга — нужно умножить квадрат его радиуса на иррациональное число π, которое приближенно равно 3,14. Ну а если бы мы не знали значения числа π? Или нам нужно было бы вычислить площадь какой-нибудь другой более сложной фигуры? Можно, конечно, нарисовать ее на клетчатой бумаге и подсчитать приближенно количество клеточек, содержащихся внутри фигуры. Более удобный способ измерения основан на применении точных весов — нужно сравнить веса вырезанной из картона фигуры и квадратика известной площади. Отношение весов, естественно, будет равно отношению площадей. Конечно, такие методы вычисления площадей сейчас применяются очень редко. Существует специальный раздел математики — интегральное исчисление, одной из задач которого и является вычисление площадей, объемов, длин и т. п.

Покажем теперь, как можно решить задачу о вычислении площади круга методом Монте-Карло. Нарисуем квадрат, сторону которого примем за единицу длины. Впишем в этот квадрат четверть круга, как показано на рис. 10. Если такой чертеж некоторое время подержать под дождем, то на его поверхности останутся следы капель. Подсчитаем число следов внутри квадрата и внутри круга. Очевидно, что их отношение будет равно отношению площадей этих двух фигур,

ний вещества, свойств тел при высоких и низких температурах и давлениях и т. д. Однако имеются явления и процессы, которые во многом определяются конкретными свойствами микроскопических величин. Так, например, связь давления с температурой и объемом для жидкостей зависит от свойств молекул жидкости. Еще сложнее дело обстоит в области физической кинетики, т. е. при исследовании тел, не находящихся в равновесии. Скажем, если тело нагрето неравномерно, то с течением времени его состояние будет стремиться к равновесию. Происходит выравнивание температуры по объему. Этот процесс также сильно зависит от конкретных взаимодействий микрочастиц, образующих тело. Для изучения процессов подобного рода общих методов нет. В связи с этим большой интерес представляют попытки использовать метод Монте-Карло для решения некоторых задач статистической физики и физической кинетики. Уже предпринято исследование поведения ряда простейших систем из большого количества частиц, например совокупности твердых шаров. Расчетами получены свойства таких систем в равновесных состояниях и кинетика приближения их к равновесию.

В народном хозяйстве метод статистических испытаний будет, видимо, в скором времени широко применяться к исследованию работы многих предприятий, занятых выполнением различного рода заявок по обслуживанию заказчиков. Примерами подобного рода предприятий массового обслуживания являются телефонные станции, автоматы, управляющие сложными агрегатами, бензозаправочные станции, базы и склады различного оборудования, автохозяйства и т. п. Каждая система массового обслуживания имеет определенные ограниченные возможности для выполнения заявок. Так, телефонная станция может обеспечить связь одновременно определенному числу абонентов, соответствующему числу каналов связи, имеющихся у этой станции, на бензоколонке заправляется одновременно только небольшое число машин и т. д. Заявки же на обслуживание поступают случайным образом, так как отдельные заказчики действуют независимо друг от друга. Поэтому иногда обслуживающая система оказывается перегруженной — образуется очередь на выполнение заявок, в других случаях при малом потоке заявок система простаивает или работает не на полную мощность. В связи с этим огромное значение приобретает решение вопросов, относящихся к изучению обслуживающих систем и к отысканию оптимальных режимов их работы при случайных потоках заявок.

До появления метода статистических испытаний круг задач массового обслуживания, который мог быть исследован, был чрезвычайно мал. В то же время практическая деятельность требует неотлагательного решения многих сложных

ся 20 раз, а в другом, содержащем тоже тысячу знаков, — 23 раза. Однако исследование большого числа литературных текстов показывает, что в среднем частота появления буквы *у* равна 21 разу. Поэтому следует ожидать, что и в выбранном нами отрывке эта буква встретится около 21 раза.

Таким образом, вероятностью некоторого события (например, появления буквы *у*) следует назвать отношение числа интересующих нас событий (появлений буквы *у*) ко всему числу событий (в рассматриваемом примере — к тысячи).

Многие примеры, привлекаемые для пояснения теории вероятностей, часто кажутся очень искусственными и надуманными. Это, на первый взгляд, относится и ко всему написанному выше. Какая польза в том, что мы знаем частоту появления различных знаков в русском тексте? Оказывается, большая. Типографские рабочие при ручном наборе пользуются так называемыми наборными кассами. Касса представляет собою ящик, разделенный перегородками на клетки, в каждой из которых находятся литеры одной буквы или знака. Ясно, что бессмысленно подготавливать для набора одинаковое количество всех знаков — некоторых может не хватить, другие останутся. Поэтому в русской наборной кассе клетки для наиболее распространенных букв делаются большими, а для редко встречающихся — меньше. Кроме того, первые помещаются в центре кассы, вторые — по бокам. То же относится и к клавиатуре пишущей машинки — для наиболее ловких указательных пальцев работы больше. За ними закреплены такие буквы, как *к, е, и, р*. На долю же непослушных мизинцев достались встречающиеся редко *ф, я, й* и им подобные.

Очевидно, что для того чтобы указать вероятность определенного события, нужно иметь какие-то сведения об этом событии. В нашем примере эти сведения мы получили из анализа различных отрывков. Затем, предположив, что повторяемость букв во всех русских текстах примерно одинакова, мы смогли предсказать вероятность появления той или иной буквы в еще не изученном тексте.

Точно так же, ожидая автобус на остановке, на которой останавливаются машины трех маршрутов, например № 5, № 8 и № 12, мы не можем указать вероятность появления машины того или иного маршрута до тех пор, пока не обратим внимание на интервалы движения машин. Пусть № 5 ходит через 2 минуты, а № 8 и № 12 — через 4. Тогда можно сказать, что вероятности появления машин № 5, № 8 и № 12 равны соответственно 0,50, 0,25 и 0,25. Действительно, из 60 машин, проходящих в течение часа через остановку, 30 будут под № 5 и по 15 — под № 8 и № 12. Если нас устраивает только 8-й маршрут, то вероятность появления нужного нам автобуса равна $^1/_4$, т. е. из каждых четырех машин мы сможем воспользоваться только одной. Предположим

теперь, что мы можем ехать и по 5-му и по 8-му маршрутам. В этом случае из 60 машин нужных нам будет 45, иначе говоря, вероятность появления подходящей машины будет $45/60 = 0{,}75$. Эта вероятность складывается из вероятностей появления машин 5-го (0,50) и 8-го (0,25) маршрутов.

Таким образом, можно сформулировать правило сложения вероятностей: вероятность наступления одного из событий (безразлично какого) из некоторой совокупности событий равна сумме вероятностей каждого из событий этой совокупности. Здесь, конечно, нужно оговориться: суммировать можно только вероятности независимых событий, т. е. таких, для которых наступление одного из событий исключает возможность наступления другого. Автобус может быть только 5-го либо 8-го маршрутов, но не 5-го и 8-го одновременно. Сумма вероятностей всех независимых событий всегда равна единице.

Правило сложения вероятностей независимых событий можно проиллюстрировать и на первом рассмотренном примере. Зная вероятности появления различных букв в русском тексте: *а* — 0,062, *о* — 0,090, *е* — 0,072, — легко установить, что вероятность встретить одну из этих трех букв равна 0,224. Другими словами, эти буквы составляют примерно $^1/_4$ всех знаков в тексте.

Нам понадобится еще одно правило теории вероятностей — правило умножения. Поясним его также на примерах. Предположим, что мы бросаем одновременно монету и игральную кость, на гранях которой нанесены цифры от 1 до 6. Какова вероятность одновременного выпадения орла и четверки? Будем рассуждать следующим образом. Всего может реализоваться 12 равновероятных событий: совокупность орла и одной из 6 цифр и совокупность решки и одной из цифр. Ясно, что каждая из этих возможностей должна ожидаться с вероятностью $^1/_{12}$.

Другой способ рассуждения. Вероятность выпадения орла $^1/_2$, а вероятность выпадения четверки $^1/_6$. Очевидно, для того чтобы вычислить вероятность одновременного их выпадения, необходимо перемножить вероятности выпадения их по отдельности. Ведь при выпадении орла только в одном случае из шести появляется четверка, но орел выпадает в одном случае из двух. Таким образом, вероятность совместного наступления двух событий равна произведению вероятности одного из событий на вероятность другого события при условии, что первое событие состоялось.

Возьмем более сложный пример. Пусть машины упоминавшихся выше маршрутов окрашены либо в зеленый, либо в красный цвета, причем красных машин на 5-м и 8-м маршрутах по 40 процентов, а на 12-м только 20 процентов. Вычислим, какова будет вероятность того, что на остановку придет красный автобус любого маршрута. Из всех приходящих на

Часто возникают и смешанные ливни. Ядерноактивная частица, входящая в состав ливня, может при столкновении дать начало электронно-фотонной компоненте. Каскадные ливни, состоящие из нуклонов, мезонов, позитронов, электронов и гамма-квантов, называются ядерно-электронными, проникающими или смешанными. Изучение ливней различных типов привело к накоплению большого количества сведений относительно характера процессов, протекающих при столкновении частиц высокой энергии, и позволило объяснить многие явления, происходящие при прохождении космических лучей через атмосферу Земли.

В последнее время расчеты каскадных ливней стали проводиться при помощи метода статистических испытаний. Методика расчета аналогична тем, которые мы рассматривали выше — по вероятностям отдельных случайных актов строится последовательность большого числа событий. В печати уже появились работы, где метод Монте-Карло применен для рассмотрения процесса возникновения каскадных ливней в различных средах, например в свинце или фотоэмульсии.

С появлением метода статистических испытаний оказалось возможным приступить к решению некоторых сложных задач статистической физики. Окружающие нас макроскопические тела содержат огромное число микроскопических частиц. Так, в одном кубическом сантиметре воздуха находится примерно $2 \cdot 10^{19}$ молекул кислорода и азота, движущихся с самыми различными скоростями. Очевидно, что детально изучить движение каждой частицы не представляется возможным — составление и решение уравнений механики, описывающих поведение такого огромного числа объектов, требует невообразимого количества времени и бумаги. Однако оказывается, что макроскопические тела проявляют закономерности особого рода, так называемые статистические закономерности. Наука, изучающая эти закономерности, называется статистической физикой. Основы статистической физики были заложены еще во второй половине прошлого века в трудах Клаузиуса, Максвелла, Больцмана и Гиббса.

Наличие очень большого числа частиц и приводит к тому, что поведение системы оказывается настолько простым, что на большую часть вопросов, интересующих нас на практике, можно ответить, не вдаваясь в детали движения каждой отдельной частицы.

Так, при некоторых предположениях можно показать, что давление воздуха пропорционально его температуре и концентрации молекул и не зависит от конкретных микроскопических свойств — строения молекул и их взаимодействия между собой. В течение последнего столетия ученые при помощи методов статистической физики достигли огромных успехов в изучении газообразного, жидкого и кристаллического состоя-

Розыгрыш каскадного процесса начинается с выяснения точки входа налетающей частицы в ядро. Затем рассчитывается пробег частицы в ядре до первого столкновения. После первого столкновения нам нужно следить уже за двумя частицами, так как обе они имеют большие энергии. Каждая из них после пролета некоторого расстояния в ядре испытывает столкновение—возникают четыре частицы и т. д. Такой развивающийся лавинообразно процесс должен исследоваться до тех пор, пока часть высокоэнергетичных частиц не покинет ядро, а остальные не раздадут свою энергию оставшимся в ядре нуклонам. В результате расчета определяются энергия, тип частицы и направление ее движения.

Каскадные процессы с участием элементарных частиц могут происходить не только в ядрах, но и в несравненно больших объемах. Например, при прохождении космических лучей через атмосферу Земли возникают так называемые ливни, т. е. группы частиц, движущихся приблизительно в одном направлении со скоростью, близкой к скорости света. Образование ливня начинается с одной частицы, энергия которой очень велика. Если эта частица склонна к сильному ядерному взаимодействию (π-мезон, нейтрон, протон), то при столкновении ее с каким-либо ядром происходит рождение новых частиц — в основном нейтральных и заряженных π-мезонов и нуклонов. Возникшие частицы при аналогичных столкновениях дают третье поколение частиц высокой энергии и т. д. Таким образом, одна частица энергии порядка 10^{14}—10^{18} электроновольт может привести к образованию большого количества частиц меньшей энергии. Этот ливень частиц приходит на поверхность Земли широким фронтом.

Подобные же явления происходят и в электронно-фотонных ливнях. Электрон, обладающий энергией много большей энергии покоя электрона, т. е. большей, чем $mc^2 = 0{,}511$ *Мэв*, при своем движении в веществе испускает гамма-квант с энергией, равной примерно половине энергии электрона. Направления движения кванта и электрона приблизительно совпадают. Кванты в свою очередь способны к образованию электронно-позитронных пар. Поэтому через некоторое время квант превращается в пару частиц — теперь движутся уже три частицы: два электрона и позитрон. Направление их полета и энергия примерно одинаковы. Далее идет каскадный процесс — каждая частица испускает квант, который образует пару, и т. д. Конечно, такой процесс не может продолжаться бесконечно — после образования большой лавины частиц каждая из них будет иметь энергию порядка mc^2 и ливень затухнет. Гамма-кванты в процессе комптоновского рассеяния потеряют энергию и поглотятся в результате фотоэффекта, а электроны и позитроны отдадут свой запас энергии на ионизацию среды.

остановку машин 50 процентов идет по маршруту № 5. Красных среди них 40 процентов. Поэтому вероятность появления красной машины 5-го маршрута равна $0{,}5 \times 0{,}4 = 0{,}2$. Для 8-го маршрута аналогично получаем $0{,}25 \times 0{,}4 = 0{,}1$ и для 12-го — $0{,}25 \times 0{,}2 = 0{,}05$. Суммарная вероятность прибытия красной машины равна 0,35. Для зеленых машин имеем $0{,}5 \times 0{,}6 = 0{,}3$ (маршрут № 5), $0{,}25 \times 0{,}6 = 0{,}15$ (маршрут № 8) и $0{,}25 \times 0{,}8 = 0{,}2$ (маршрут № 12). Полная вероятность подхода зеленой машины равна 0,65. Как и должно быть, вероятность прибытия машины любого маршрута и произвольного цвета равна единице ($0{,}35 + 0{,}65 = 1$).

Этими сведениями из теории вероятностей мы и ограничимся. Их будет вполне достаточно для первого знакомства с методом статистических испытаний — методом Монте-Карло.

МЕТОД СТАТИСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ

Мы рассмотрели очень простые примеры, иллюстрирующие понятие вероятности и основные правила теории вероятностей. Можно привести много примеров и из области естественных наук, например физики. При исследовании космических лучей говорят о вероятности попадания определенного числа частиц на 1 $см^2$ поверхности Земли за 1 минуту. Рассматривая движение молекул в газе, можно поставить вопрос о вероятности того, что выбранная молекула будет иметь скорость, скажем, больше 100 *м/сек*. Физики-ядерщики оперируют с вероятностью распадов радиоактивных ядер и т. д.

Очень часто в точных науках возникает необходимость рассмотрения сложных процессов, состоящих из набора более простых, элементарных актов, вероятности которых известны. Задача ученого — найти наиболее вероятный исход такого ряда последовательных случайных событий. Исследуем, например, задачу о так называемых случайных блужданиях частицы.

Известно, что достаточно мелкие частицы, помещенные в жидкость, начинают хаотически двигаться. Это движение называется броуновским и обусловлено беспорядочными ударами молекул жидкости о частицу. Путь частицы представляет собой чрезвычайно запутанную линию — частица меняет свое направление движения и скорость совершенно случайным образом. Траектория движения одной частицы обычно никого не интересует. Гораздо более интересен вопрос о том, каким законам подчиняется совокупность частиц, находившихся вначале в некотором малом объеме жидкости. Путь отдельной частицы случаен, но в движении набора частиц можно найти

определенные статистические закономерности. Например, можно поставить вопрос о среднем расстоянии, проходимом частицей за заданный промежуток времени. Это среднее значение, полученное из наблюдений за очень большим числом частиц, будет уже не случайной величиной, как отклонение одной частицы, а вполне предсказуемой физической величиной, измерение которой на опыте будет давать всегда один и тот же результат.

Описанная задача достаточно сложна, чтобы с нее можно было начинать разговор о методе Монте-Карло. Предположим, что частица может двигаться только вверх и вниз, причем ее перемещение за каждый шаг одинаково. Так как направления ударов молекул совершенно случайны, примем, что вероятности перемещения частицы вверх или вниз при каждом шаге одинаковы и равны 0,5. Наша задача — выяснить, на сколько в среднем удалится частица от первоначального положения, скажем, за 15 шагов. Ясно, что для того, чтобы найти среднее отклонение, нужно исследовать движение достаточно большого числа частиц.

Каждая физическая задача может быть решена двумя путями — опытным и теоретическим. Вся физика сейчас соответственно делится на экспериментальную физику и физику теоретическую. Экспериментаторы изготовляют различные приборы и установки для опытного исследования интересующих их явлений, теоретики, пользуясь только пером и бумагой, пытаются на основе опытных данных и различного рода предположений и гипотез понять внутренние причины тех или иных процессов. Так было и с броуновским движением.

Беспорядочное движение мелких частиц в жидкости впервые наблюдалось английским ботаником Броуном в 1827 году. В начале нашего столетия Перреном были проведены количественные опыты по изучению смещения броуновских частиц, а Эйнштейн и Смолуховский, основываясь на гипотезе атомно-молекулярного строения вещества, смогли рассчитать зависимость смещения частицы от времени движения. Совпадение теоретических и опытных результатов подтвердило правильность взгляда на вещество, как на совокупность атомов или молекул, совершающих тепловое движение.

Вернемся к нашей задаче. Поставить опыт мы не можем, так как у нас нет частиц, которые бы случайно двигались вверх и вниз, да еще равномерными шагами — мы просто придумали их. Попробуем решить ее теоретически. Очевидно, что некоторые частицы после 15 шагов окажутся выше начальной точки, другие ниже. Для первых смещение будем считать положительным, для вторых — отрицательным. И те и другие просто из соображений симметрии равновероятны. Если мы хотим узнать среднее смещение для большого количества частиц, то знак смещения во внимание принимать не нужно.

ствуют со встречающимися им протонами и нейтронами. Ясно, что при этом одни частицы получают возможность вылетать из ядра, другие продолжают раздавать свою энергию нуклонам ядра. Этот процесс длится до тех пор, пока энергия нуклонов не уменьшится до 7—8 *Мэв*. Здесь уже становится уместным привлечение идеи составного ядра.

Таким образом, ядерную реакцию, вызванную частицами высоких энергий, можно рассматривать, как двухстадийную. На первой стадии ядро покидают нуклоны (а также связанные состояния их — например, α-частицы, представляющие комбинацию двух протонов и двух нейтронов) с энергиями порядка нескольких десятков миллионов электроновольт. Число этих частиц, их энергия и направление вылета будут определяться характером попадания частицы в ядро. Существенно, например, попала ли бомбардирующая частица в центр ядра или скользнула по периферии. В первом случае разовьется мощный каскадный процесс, т. е. многие нуклоны ядра окажутся вовлеченными в ядерную реакцию, во втором — может быть выбито лишь небольшое число нуклонов.

Последний этап реакции полностью подобен распаду сильно возбужденного составного ядра. На этой стадии происходит множественное испарение нуклонов из ядра, обладающего избыточной энергией. Как уже указывалось, такие частицы испускаются сферически симметрично. Число испущенных ядром частиц и их энергетическое распределение в результате ядерного столкновения при больших энергиях может быть исследовано при помощи толстослойных фотоэмульсий или камеры Вильсона. При этом наблюдаются характерные «звезды», т. е. следы многих частиц, выходящих из одной точки, а именно из ядра, в которое попала сверхбыстрая частица. По виду лучей (их длине, толщине и другим особенностям) определяют заряд испущенной частицы, ее массу и энергию. Эксперименты, проведенные как на искусственно полученных частицах высокой энергии (на ускорителях), так и на естественных космических частицах, показали справедливость изложенной картины реакции. Испущенные частицы достаточно четко разделяются на высокоэнергичные первичные и испарительные частицы малой энергии.

Теоретическое исследование каскадной ядерной реакции, естественно, можно провести при помощи метода Монте-Карло. Расчет основывается на рассмотрении ядра, как совокупности нуклонов, на которых налетающая частица испытывает ряд последовательных столкновений. Для проведения вычислений необходимо знать вероятности элементарных процессов, имеющих место при столкновении нуклонов больших энергий с нуклонами ядра. Эти данные можно получить из экспериментов, в которых было исследовано рассеяние протонов на отдельных нейтронах и протонах.

продукты реакции (возникшие новые ядра и частицы) удалятся друг от друга на расстояние, превышающее радиус действия ядерных сил. Символически процесс реакции между исходными частицей a и ядром X можно записать так: $a + X \to C \to b_1 + b_2 + Y_1 + Y_2 + \ldots$, где b_1, b_2, Y_1 и Y_2 — новые ядра и частицы, а C — образовавшаяся во время взаимодействия составная система. Свойства ее имеют решающее значение для дальнейшего хода реакции.

Если энергия частицы невелика, скажем меньше 30—50 *Мэв*, то можно считать, что обе стадии реакции (образование составной системы и распад ее) происходят независимо друг от друга. Иными словами, составное ядро C при распаде уже забыло, каким образом оно возникло. Это предположение впервые выдвинул знаменитый датский ученый Нильс Бор, а обосновывается оно следующим образом. Частица a, попадающая в ядро, отдает при столкновениях свою энергию составным частям ядра — нейтронам и протонам (общее их название — нуклоны). Нуклоны ядра сильно взаимодействуют друг с другом, поэтому вскоре после проникновения частицы в ядро энергия, принесенная извне, почти поровну распределяется между нуклонами. При этом на каждый нуклон приходится энергия в несколько миллионов электроновольт. Связаны же нуклоны в ядре сильно — для того чтобы какой-нибудь нейтрон или протон вылетел из ядра, необходимо, чтобы он получил избыток энергии, равный примерно 8 миллионам электроновольт.

В конце концов один из нуклонов получит достаточную для вылета из ядра энергию, но до этого момента произойдут многочисленные столкновения нуклонов, т. е. ядро «забудет», откуда и каким образом получило оно энергию возбуждения. Таким образом, способ распада составного ядра C будет зависеть только от его свойств (энергии возбуждения, момента количества движения и т. п.), но не от способа его образования. Естественно, что вылетающие из составного ядра частицы будут распределены сферически симметрично — никакой связи между направлениями движения частицы a и частиц-продуктов b_1, b_2 не будет. Концепция составного ядра на протяжении двух десятков лет оставалась исходным пунктом для анализа ядерных реакций.

Однако при переходе к более высоким энергиям бомбардирующих ядра частиц картина существенно меняется. Большая энергия может распределиться между многими нуклонами ядра и при этом каждый из них будет обладать достаточным избытком ее для того, чтобы покинуть ядро. Качественно характер ядерной реакции можно описать следующим образом. Частица высокой энергии, попадая в ядро, сталкивается с одним из нуклонов. Поделив между собой избыточную энергию, они продолжают движение и на своем пути взаимодей-

Обозначив смещение после n шагов через h_n, мы можем сказать, что нужно найти среднюю величину абсолютного значения h_n, т. е. $\overline{|h_n|}$, вертикальные черточки показывают, что величина всегда берется со знаком плюс, а горизонтальная черта вверху заменяет слова «среднее значение». Однако, как будет видно из результата, удобнее пользоваться не $\overline{|h_n|}$, а $\overline{h^2}_n$, т. е. средним квадратом смещения. Квадрат любой величины всегда положителен, поэтому вертикальные черточки опущены.

После первого шага длиной единица $h_1 = \pm 1$, смотря по тому, вверх или вниз сместилась частица, а $\overline{h_1^2} = 1$. После второго шага $h_2 = h_1 \pm 1$, а $h_2^2 = h_1^2 \pm 2h_1 + 1$. Так как вероятности знаков плюс и минус есть 0,5 (это вероятности смещения вверх и вниз), то

$$\overline{h_2^2} = \frac{1}{2}\left[\overline{h_1^2} + 2\overline{h_1} + 1 + \overline{h_1^2} - 2\overline{h_1} + 1\right] = \overline{h_1^2} + 1.$$

Можно перейти к рассмотрению третьего шага, однако мы достигнем цели быстрее, если рассмотрим сразу n-й шаг. Совершенно аналогично тому, как мы писали для второго шага, можно утверждать, что

$$h_n = h_{n-1} + 1 \text{ или } h_n = h_{n-1} - 1,$$

причем оба эти равенства равновероятны, т. е. осуществляются с вероятностью 0,5. Возводя в квадрат и усредняя, получим

$$\overline{h_n^2} = \overline{h^2}_{n-1} + 1.$$

Теперь, вспоминая, что $\overline{h_1^2} = 1$, и последовательно применяя последнюю формулу, легко получить

$$\overline{h_n^2} = n,$$

т. е. средний квадрат смещения частицы за n шагов равен просто числу шагов. Иными словами, если мы исследуем, скажем 100 частиц, каждая из которых делает 15 шагов, а затем найдем средний квадрат смещения, то получим число, близкое к 15, причем тем ближе, чем больше частиц мы рассмотрим.

Таким образом, опытное исследование этой задачи оказалось невозможным, а теоретическое привело к успеху. А что бы мы делали, если бы задача оказалась потруднее, и мы не смогли бы решить ее так просто? Могло бы получиться какое-нибудь уравнение, для решения которого понадобилось бы слишком много времени. Оказывается, есть еще один путь — метод моделирования. Поясним его на примере только что рассмотренной задачи.

Случайные движения частицы вверх и вниз можно заменить каким-либо другим процессом, происходящим по тем же самым вероятностным законам. Движение частицы проис-

ходит последовательными шагами, причем перед каждым шагом частица должна выбрать одно из двух равновероятных направлений. Нельзя ли придумать какой-нибудь процесс, состоящий из последовательности двух равновероятных событий? Простейший пример такого типа — последовательное бросание монеты. При каждом бросании с вероятностью половина выпадает либо орел, либо решка. Если бросить монету 15 раз и договориться, что выпадение орла соответствует движению частицы вверх, а выпадение решки — шагу вниз, то такой опыт заменит нам опыт по исследованию движения частиц. Таким образом, каждой траектории частицы мы сопоставим серию из 15 бросаний монеты. Для исследования 10 траекторий нужно бросить монету 150 раз. Вот что получилось при моделировании 10 траекторий.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
о	р	р	о	о	о	р	о	р	р
о	о	о	р	о	о	о	р	о	о
о	р	о	р	р	р	о	о	о	о
р	о	р	р	р	о	р	р	р	р
р	о	р	о	о	р	о	р	о	р
р	р	о	р	о	о	р	р	о	р
о	р	о	о	о	р	о	р	р	р
о	о	о	о	о	о	р	о	р	р
р	о	р	р	о	р	о	р	о	р
р	р	р	р	р	о	р	р	р	о
р	о	о	о	о	р	о	р	р	о
р	о	р	р	р	о	р	о	р	р
р	р	о	р	о	р	о	р	о	р
р	о	р	р	о	о	р	р	о	р
о	о	р	о	р	р	р	р	р	р
−3	+3	−1	−3	+3	+5	+1	−5	+1	−9
9	9	1	9	9	25	1	25	1	81

В этой таблице — о — орел, р — решка. Внизу указаны величины смещения вместе с их знаками (плюс — вверх, минус — вниз). Последняя строчка таблицы — квадраты смещений.

Несмотря на то, что различные частицы двигались по-разному (десятая почти все время опускалась вниз, а седьмая топталась около исходного положения), в совокупности из десяти частиц уже проявляются так называемые статистические закономерности. Например, мы видим, что слишком большое отклонение от исходного состояния маловероятно. Только одна из частиц ушла на 9 шагов и две — на 5. Остальные сместились всего на 1 или 3 шага. Количество частиц, ушедших от начального положения вверх и вниз, одинаково. Сумма квадратов смещений равна 170, а средний квадрат — 17, что достаточно близко к теоретическому значению — 15. Различие обусловлено тем, что число рассмотренных нами частиц невелико.

активную зону стержни из материала, хорошо поглощающего нейтроны, например кадмия или бора. Регулируя положение стержней, можно добиться заданного значения коэффициента размножения нейтронов. О введении в реактор исходных нейтронов заботиться не нужно — они возникают там за счет реакции самопроизвольного деления ядер урана.

Таким образом, коэффициент размножения зависит от очень большого числа параметров — формы и объема реактора, характера расположения блоков горючего и замедлителя, положения регулирующих стержней и отражателя, содержания легкого изотопа в горючем, состава замедлителя и отражателя, материала регулирующих стержней и т. д.

Полное решение задачи о поведении нейтронов внутри реактора получить очень трудно. Ведь концетрация нейтронов зависит и от координат точки внутри реактора, и от их энергии и направления движения. Однако для получения коэффициента размножения такая полная информация не нужна. При использовании метода Монте-Карло рассматривается несколько последовательных поколений нейтронов. Если мы поместим в реактор N_1 нейтронов и рассмотрим судьбу каждого из них (замедление, отражение, утечку, поглощение и, наконец, вызванное ими деление ядер урана), то в результате получим N_2 нейтронов второго поколения, возникших в результате актов деления, вызванных первым поколением. Отношение N_2/N_1 не равно, конечно, коэффициенту размножения, так как мы поместили исходные нейтроны произвольным образом. При расчете следующего поколения мы получим N_3 новых нейтронов. Отношение N_3/N_2 будет отличаться от N_2/N_1, однако после исследования большого числа поколений мы найдем, что отношение $N_{i+1}N/i$ уже не зависит от номера поколения i. Это отношение и является коэффициентом размножения нейтронов при рассматриваемых условиях. Меняя какой-либо из параметров реактора, можно выяснить его влияние на коэффициент размножения и, следовательно, оптимальным образом сконструировать реактор. Огромное значение таких расчетов при современном бурном развитии ядерной энергетики очевидно.

Обратимся теперь к применениям метода статистических испытаний в ядерной физике. В последнее время он стал использоваться для изучения механизмов ядерных реакций под действием частиц высокой энергии — порядка сотен миллионов электроновольт. Частицы такой и больших энергий встречаются в космических лучах, а также могут быть получены на современных ускорителях.

Как известно, ядерные силы имеют малый радиус действия. Ядерная реакция не начинается до тех пор, пока ядро и падающая на него частица не сблизятся на расстояния около 10^{-13} *см*. И, наоборот, реакция прекращается тогда, когда

Таким образом, при использовании обогащенного ураном-235 ядерного горючего можно создать условия, благоприятные для протекания цепной реакции на медленных (тепловых) нейтронах. При этом в активную зону полезно ввести замедлитель, т. е. вещество с легкими атомными ядрами. При столкновении с ними нейтроны будут быстро замедляться, что приведет к уменьшению роли вредного процесса поглощения быстрых нейтронов тяжелым изотопом урана. В качестве замедлителя используются вещества с легкими атомными ядрами — водородсодержащие соединения, углерод и т. п. Однако обычная вода не применима для этой цели — протоны охотно поглощают нейтроны. Поэтому можно применять только соединения, содержащие тяжелый изотоп водорода — дейтерий, например тяжелую воду. Удобным замедлителем является и графит. Замедлитель и ядерное горючее обычно не перемешиваются, а располагаются отдельно. При такой конструкции реактора нейтрон, образовавшийся в области, содержащей уран, и попавший в блок замедлителя, уже не участвует во вредном процессе поглощения без деления — из замедлителя он выходит с тепловой энергией. Эти нейтроны и поддерживают цепной процесс. Остальные нейтроны либо поглощаются ядрами урана-238, либо уходят за пределы реактора. Последний эффект можно уменьшить, окружив активную зону веществом, отражающим нейтроны.

Для нормальной работы реактора прибыль нейтронов за счет деления ядер и уменьшение их числа в результате утечки и поглощения должны быть скомпенсированы. В этом случае число делений ядер в единицу времени, а следовательно, и мощность реактора будут постоянными. Уменьшение содержания нейтронов в реакторе со временем приводит к затуханию ядерной реакции. Наоборот, рост концентрации нейтронов вызывает неуправляемую цепную реакцию, в результате которой реактор разрушается.

Основным параметром, характеризующим работу ядерного реактора, является коэффициент размножения нейтронов K. Он определяется как произведение числа возникших в одном акте деления вторичных нейтронов на вероятность того, что быстрый нейтрон после замедления и возможного захвата вызовет реакцию деления P. Другими словами, если при первом делении возникло ν нейтронов, то в следующем поколении их будет $K = P\nu$. Если $K < 1$, то число нейтронов в реакторе со временем уменьшится, реакция затухнет. Такой режим называется подкритическим. В надкритическом режиме ($K > 1$) возникает угроза взрыва. Работа реактора возможна только при $K = 1$. Ясно, что сконструировать устройство с точным значением коэффициента размножения нейтронов очень трудно. Поэтому неотъемлемой деталью каждого ядерного реактора является регулирующее устройство — вдвигающиеся в

Чем больше серий испытаний мы будем брать, тем ближе подойдем к теоретическому значению среднеквадратичного смещения. Точно так же все наблюдаемые на опыте макроскопические величины (т. е. физические величины, характеризующие тела, образованные из огромного числа молекул или атомов), обусловленные большим количеством микроскопических процессов, являются средними статистическими величинами. Давление газа на стенку сосуда, например, возникает из-за хаотических ударов отдельных молекул газа. Хотя удары молекул различны по силе, числа молекул, ударяющихся о различные участки стенки, отличаются друг от друга — среднее давление, измеренное манометром, является вполне определенной предсказуемой величиной.

Нельзя ли как-нибудь усовершенствовать наш модельный опыт — ведь бросать монету даже 150 раз довольно хлопотно? Можно обойтись и без монеты. Есть и другие источники случайных величин. Возьмем какую-нибудь таблицу тиража выигрышей по денежно-вещевой лотерее. В каждой серии (ее номер в первой колонке таблицы) 200 билетов. На один из них — вторая колонка — падает выигрыш. Эта колонка таблицы может избавить нас от утомительного бросания монеты. Номера билетов, написанные на бумажках, при розыгрыше вытаскиваются из лотерейного колеса совершенно случайным образом. Поэтому следует ожидать, что с вероятностью половина будет вытащен билет с номером от 001 до 100 и с такой же вероятностью — с номером от 101 до 200. Действительно, в любой таблице тех и других номеров примерно одинаковое количество и распределены они по таблице совершенно случайно. Ниже приведены три участка второй колонки таблицы тиража, состоявшегося 13 августа 1964 года.

146	о	001	р	136	о
040	р	094	р	046	о
119	о	169	о	189	о
047	р	025	р	075	р
114	о	117	о	160	о
023	р	080	р	004	р
106	о	186	о	113	о
022	р	063	р	043	р
134	о	080	о	175	о
170	о	057	р	054	р
106	о	058	р	117	о
149	о	114	о	023	р
144	о	017	р	031	р
040	р	072	р	114	о
169	о	149	о	016	р
	+5		—5		—1
	25		25		1

Будем считать, что номера 001—100 соответствуют движению частицы вверх, а билеты 101—200 — вниз. Номера би-

летов в таблице переведены на язык «орел—решка». Внизу опять приведены результирующие смещения частиц и их квадраты.

С лотерейной таблицей работать, конечно, легче, чем с монетой, однако тоже не очень удобно. Оказывается, есть еще более простой способ осуществить наш опыт с частицами. Воспользуемся для этого так называемой таблицей случайных чисел. Эти таблицы довольно своеобразны. Все видели таблицы логарифмов, тригонометрических или других функций. Таблицы синусов, составленные различными авторами, похожи друг на друга. Если в одной из таблиц мы находим $\sin 60^\circ = 0{,}705$, то мы уверены, что и во всех остальных таблицах для синуса шестидесяти градусов мы найдем то же значение. Таблицы случайных чисел, составленные разными учеными, непохожи друг на друга. Они представляют собой набор чисел, расположенных в случайном порядке. Ясно, что таких таблиц можно составить сколько угодно, и все они будут разными. Вот, например, верхняя часть седьмой страницы таблиц случайных чисел, опубликованных М. Кадыровым в 1936 году:

3590	3265	6446	7401	7958	3485	4920	9755	2791	3473
2151	1681	8778	2516	1923	6550	3834	4568	7606	8108
4899	8244	5442	4155	9051	0294	0841	8705	3779	5847
6410	4612	1643	8285	5988	4926	5184	2945	2516	0808
9679	9403	6525	5555	9042	1780	7926	2544	0303	5777
1434	2216	2917	1871	3074	5215	6834	2415	4714	2852
2597	3617	3476	2452	7094	0693	2764	1789	1436	1998
7715	5229	0348	8647	4767	6781	7701	6876	5181	5891
4430	6673	9585	3762	5675	4894	1686	8337	9701	2530
1768	2443	7108	2814	9453	6462	3473	2124	3585	0600
4619	3956	6853	4251	1080	9203	9646	0202	4564	5764
7086	7398	7538	2886	9759	6060	0661	3253	5491	6677
1748	5537	1487	6627	7070	3963	8550	0424	2542	5656
2679	8038	0149	0762	1149	8465	4623	6545	4224	0219
2315	3981	8352	1673	4812	4220	1532	2264	1479	8454

Первое, что бросается в глаза при рассмотрении этой таблицы, — полное отсутствие какого бы то ни было порядка в подборе чисел. Это и есть основная отличительная черта таблиц случайных чисел. К таким таблицам часто приходится прибегать при проверке различного рода статистических теорий. Чуть ниже воспользуемся ими и мы.

Впервые идею о составлении таблиц случайных чисел выдвинул английский математик Карл Пирсон. Он понял, что можно заменить неудобные и очень трудоемкие операции, связанные с получением случайных чисел, путем бросания монет, игральных костей и т. п., составлением таблиц, числа в которых были бы расположены в полном беспорядке.

Есть много способов составления таблиц случайных чисел. Можно, например, воспользоваться газетой с лотерейной таблицей. Первые таблицы, выпущенные в 1927 году учеником

Это свойство метода позволяет применять его для расчета различных конструкций ядерных реакторов. С принципом действия реакторов знакомы многие. Возможность создания их возникла в 1939 году после открытия физиками реакции деления ядер урана нейтронами. Как уже говорилось, основной отличительной чертой таких реакций является возникновение нескольких вторичных нейтронов. Таким образом появилась надежда на создание устройства, в котором протекала бы самоподдерживающаяся цепная ядерная реакция, в результате которой можно было бы получать энергию за счет деления тяжелых ядер — урана и тория. Прошло всего три года, и в 1942 году был построен первый действующий реактор. А в 1954 году в Советском Союзе была пущена первая в мире атомная электростанция. Это совсем не говорит о том, что создание реакторов — простая задача. Скорее мы имеем перед собой еще один пример чрезвычайно быстрого в наше время проникновения новейших физических открытий в технику.

Уран, встречающийся в природе, состоит из двух изотопов — U^{235} и U^{238}. Наиболее ценным является легкий изотоп U^{235}, его ядра делятся и быстрыми нейтронами (энергия их несколько миллионов электроновольт), и тепловыми, т. е. такими, которые пришли в тепловое равновесие со средой, — энергия таких нейтронов около 0,025 *эв*. Но, к сожалению, содержание U^{235} в природном уране крайне мало — всего 0,7 процента. Остальные 99,3 процента составляет тяжелый изотоп U^{238}, способный делиться только под действием быстрых нейтронов.

Хотя вторичные нейтроны имеют энергию порядка 2—3 миллионов электроновольт и, в принципе, могут вызвать деление тяжелого изотопа урана, цепная реакция в куске природного урана невозможна. Дело в том, что существуют два процесса, препятствующие развитию цепной реакции. Во-первых, часть быстрых нейтронов может просто поглотиться ядрами U^{238} без деления. В результате этой реакции нейтрон выбывает из игры. Во-вторых, при неупругих столкновениях с ядрами нейтроны быстро теряют свою энергию и замедляются, а медленные нейтроны способны делить только U^{235}, которого в естественном уране содержится незначительное количество. Расчеты показывают, что цепной процесс может осуществляться при содержании U^{235}, равном по крайней мере 8—10 процентов. Этот результат получен в предположении, что объем активной зоны, т. е. зоны, содержащей делящееся вещество, очень велик. Иначе говоря, пренебрегается утечка нейтронов в окружающее пространство. Если же учесть и этот эффект, то необходимое для поддержания цепной реакции количество легкого изотопа урана будет еще больше.

летов в таблице переведены на язык «орел—решка». Внизу опять приведены результирующие смещения частиц и их квадраты.

С лотерейной таблицей работать, конечно, легче, чем с монетой, однако тоже не очень удобно. Оказывается, есть еще более простой способ осуществить наш опыт с частицами. Воспользуемся для этого так называемой таблицей случайных чисел. Эти таблицы довольно своеобразны. Все видели таблицы логарифмов, тригонометрических или других функций. Таблицы синусов, составленные различными авторами, похожи друг на друга. Если в одной из таблиц мы находим $\sin 60° = 0{,}705$, то мы уверены, что и во всех остальных таблицах для синуса шестидесяти градусов мы найдем то же значение. Таблицы случайных чисел, составленные разными учеными, непохожи друг на друга. Они представляют собой набор чисел, расположенных в случайном порядке. Ясно, что таких таблиц можно составить сколько угодно, и все они будут разными. Вот, например, верхняя часть седьмой страницы таблиц случайных чисел, опубликованных М. Кадыровым в 1936 году:

3590	3265	6446	7401	7958	3485	4920	9755	2791	3473
2151	1681	8778	2516	1923	6550	3834	4568	7606	8108
4899	8244	5442	4155	9051	0294	0841	8705	3779	5847
6410	4612	1643	8285	5988	4926	5184	2945	2516	0808
9679	9403	6525	5555	9042	1780	7926	2544	0303	5777
1434	2216	2917	1871	3074	5215	6834	2415	4714	2852
2597	3617	3476	2452	7094	0693	2764	1789	1436	1998
7715	5229	0348	8647	4767	6781	7701	6876	5181	5891
4430	6673	9585	3762	5675	4894	1686	8337	9701	2530
1768	2443	7108	2814	9453	6462	3473	2124	3585	0600
4619	3956	6853	4251	1080	9203	9646	0202	4564	5764
7086	7398	7538	2886	9759	6060	0661	3253	5491	6677
1748	5537	1487	6627	7070	3963	8550	0424	2542	5656
2679	8038	0149	0762	1149	8465	4623	6545	4224	0219
2315	3981	8352	1673	4812	4220	1532	2264	1479	8454

Первое, что бросается в глаза при рассмотрении этой таблицы, — полное отсутствие какого бы то ни было порядка в подборе чисел. Это и есть основная отличительная черта таблиц случайных чисел. К таким таблицам часто приходится прибегать при проверке различного рода статистических теорий. Чуть ниже воспользуемся ими и мы.

Впервые идею о составлении таблиц случайных чисел выдвинул английский математик Карл Пирсон. Он понял, что можно заменить неудобные и очень трудоемкие операции, связанные с получением случайных чисел, путем бросания монет, игральных костей и т. п., составлением таблиц, числа в которых были бы расположены в полном беспорядке.

Есть много способов составления таблиц случайных чисел. Можно, например, воспользоваться газетой с лотерейной таблицей. Первые таблицы, выпущенные в 1927 году учеником

Это свойство метода позволяет применять его для расчета различных конструкций ядерных реакторов. С принципом действия реакторов знакомы многие. Возможность создания их возникла в 1939 году после открытия физиками реакции деления ядер урана нейтронами. Как уже говорилось, основной отличительной чертой таких реакций является возникновение нескольких вторичных нейтронов. Таким образом появилась надежда на создание устройства, в котором протекала бы самоподдерживающаяся цепная ядерная реакция, в результате которой можно было бы получать энергию за счет деления тяжелых ядер — урана и тория. Прошло всего три года, и в 1942 году был построен первый действующий реактор. А в 1954 году в Советском Союзе была пущена первая в мире атомная электростанция. Это совсем не говорит о том, что создание реакторов — простая задача. Скорее мы имеем перед собой еще один пример чрезвычайно быстрого в наше время проникновения новейших физических открытий в технику.

Уран, встречающийся в природе, состоит из двух изотопов — U^{235} и U^{238}. Наиболее ценным является легкий изотоп U^{235}, его ядра делятся и быстрыми нейтронами (энергия их несколько миллионов электроновольт), и тепловыми, т. е. такими, которые пришли в тепловое равновесие со средой, — энергия таких нейтронов около 0,025 *эв*. Но, к сожалению, содержание U^{235} в природном уране крайне мало — всего 0,7 процента. Остальные 99,3 процента составляет тяжелый изотоп U^{238}, способный делиться только под действием быстрых нейтронов.

Хотя вторичные нейтроны имеют энергию порядка 2—3 миллионов электроновольт и, в принципе, могут вызвать деление тяжелого изотопа урана, цепная реакция в куске природного урана невозможна. Дело в том, что существуют два процесса, препятствующие развитию цепной реакции. Во-первых, часть быстрых нейтронов может просто поглотиться ядрами U^{238} без деления. В результате этой реакции нейтрон выбывает из игры. Во-вторых, при неупругих столкновениях с ядрами нейтроны быстро теряют свою энергию и замедляются, а медленные нейтроны способны делить только U^{235}, которого в естественном уране содержится незначительное количество. Расчеты показывают, что цепной процесс может осуществляться при содержании U^{235}, равном по крайней мере 8—10 процентов. Этот результат получен в предположении, что объем активной зоны, т. е. зоны, содержащей делящееся вещество, очень велик. Иначе говоря, пренебрегается утечка нейтронов в окружающее пространство. Если же учесть и этот эффект, то необходимое для поддержания цепной реакции количество легкого изотопа урана будет еще больше.

Мы достаточно подробно остановились на способе решения задачи о проникновении гамма-излучения через защитные слои. В настоящее время при помощи метода статистических испытаний получены решения многих задач такого рода. Исследованы защитные свойства сред, различных по своему химическому составу, плотности, размерам и конфигурации. Получены распределения квантов по энергии или углу при прохождении или отражении их от защитных устройств, причем условия падения квантов на защитную среду широко варьировались: брались гамма-лучи различных начальных энергий или направлений движения. Такие расчеты чрезвычайно важны при проектировании ядерных реакторов, ускорителей частиц, источников гамма-излучения и т. п.

Расчет защиты от нейтронного излучения во многом напоминает решение задачи о гамма-лучах. Здесь мы тоже имеем последовательность случайных элементарных актов, представляющих собой столкновения нейтронов с ядрами вещества. Конечно, закономерности этих столкновений другие. Нейтрон, являясь сравнительно тяжелой частицей (его масса почти в 2 тысячи раз превышает массу электрона), практически не чувствует наличие электронов в среде — он сильно взаимодействует только с атомными ядрами. При этом нейтрон может упруго рассеяться на ядре, перевести ядро в возбужденное состояние (этот процесс называется неупругим рассеянием), или же, попав в ядро, поглотиться им. Наконец некоторые ядра под действием нейтронов определенной энергии могут разделиться на две части. Такой процесс приводит к размножению нейтронов, так как при реакции деления вместе с осколами ядер появляются 2—3 вторичных нейтрона. Зная вероятности отдельных процессов, можно, так же как и при изучении гамма-квантов, по очереди разыгрывать события, происходящие с нейтроном при его движении в среде. Если среда состоит из различных сортов атомов, приходится, конечно, при каждом столкновении выяснять, с каким именно из ядер произошло взаимодействие. После розыгрыша историй движения многих нейтронов можно приближенно определить все интересующие нас характеристики нейтронного потока, проходящего через заданную среду. В частности, таким образом определяется и количество энергии, теряемой нейтронами в единице объема, т. е. доза нейтронного облучения.

Большим преимуществом метода статистических испытаний является его применимость к задачам, связанным со сложной конфигурацией защиты. Возможность применения других методов при исследовании, например, защиты, состоящей из нескольких слоев различных веществ, совершенно исключается. Метод Монте-Карло хорошо работает и в этом и в других случаях, где приходится иметь дело с защитными устройствами сложных форм.

Пирсона Типпетом, были составлены по данным переписи населения Англии. Пятьдесят тысяч однозначных чисел, содержащихся в таблицах Кадырова, были выписаны из данных по переписи населения СССР в 1926 году. Цифры брались одна за другой в том порядке, в каком они встречаются в сводках по городам и губерниям. Последние цифры данных о численности населения в каком-либо районе отбрасывались, для того, чтобы избежать возможной неслучайности, которая могла возникнуть из-за тенденции к округлению чисел переписчиками.

Наверное, читатель уже догадался, как воспользоваться этими таблицами для решения нашей задачи. Если мы хотим воспроизвести 15 шагов какой-либо частицы, достаточно взять один столбик из пятнадцати цифр, причем условиться, что цифры 0, 1, 2, 3 и 4 соответствуют движению частицы вверх или выпадению орла, а цифры 5, 6, 7, 8 и 9 — движению вниз или выпадению решки. Для первого столбика получим:

рррооррорррррр

В результате частица отойдет от первоначального положения на 7 шагов вниз. Данных нашей таблицы хватит на обсчет сорока траекторий частиц. Их смещения будут равны: —7, —1, +5, +5, —1, —1, —3, +1, +3, —1, —3, +7, —5, +5, +3, —1, +3, —1, +5, —3, —1, +1, +7, —7, —3, +11, —3, —9, —5, +1, —3, +3, —5, +3, —1, —3, +1, +7, +3, +1.

На рис. 1 представлены истории движения трех частиц

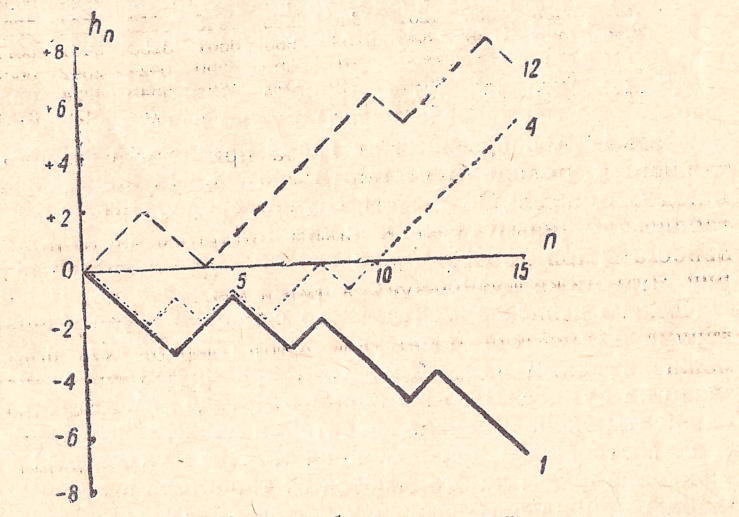


Рис. 1. История блуждания трех частиц.

(первой, четвертой и двенадцатой). По горизонтальной оси отложен номер шага, по вертикальной — смещение частицы после данного шага.

Даже из рассмотрения всего пятидесяти с небольшим частиц мы можем получить некоторые сведения о поведении роя частиц, блуждающих по направлениям вверх—вниз. Видно, что одинаковое число частиц ушло от положения равновесия в разные стороны (27 вниз и 26 вверх). Большая часть частиц сместилась всего на 1—3 шага, и лишь одна отклонилась на 11 шагов. Все это следствие равновероятности отклонения в обоих направлениях при каждом шаге. Можно сосчитать среднеквадратичное отклонение — оно оказывается равным 14,3, т. е. близким к значению, полученному точным расчетом.

Метод рассмотрения поведения системы, каждый этап движения которой моделируется по известным законам при помощи какого-либо источника случайных чисел, и называется методом Монте-Карло. Мы проиллюстрировали его на простейшей задаче одномерного движения частиц. Совершенно аналогично можно было бы изучить движение частиц, способных перемещаться не только вверх и вниз, но и вправо и влево. При каждом шаге такая частица могла бы уйти с вероятностью $^1/_4$ по одному из четырех направлений. Для определения направления при каждом шаге можно воспользоваться подбрасыванием двух монет. Они могут упасть в четырех комбинациях орлов и решек: оо, рр, ор и ро. Каждой из этих равновероятных комбинаций нужно сопоставить одно из возможных направлений движения. Гораздо удобнее опять воспользоваться таблицами случайных чисел. Если взять двузначные случайные числа, то числам в интервалах 00—24, 25—49, 50—74 и 75—99 можно сопоставить шаги вверх, вниз, вправо и влево.

Для исследования трехмерного движения (вверх—вниз, вправо—влево, вперед—назад) нужно взять игральную кость. Цифры 1—6, нанесенные на грани игрального кубика, можно сопоставить с одним из шести возможных направлений движения. Конечно, и в этом случае предпочтительнее пользоваться таблицами случайных чисел.

Метод Монте-Карло как способ исследования сложных вероятностных процессов содержит в себе элементы и теоретического и экспериментального способов изучения явлений. Его нельзя назвать экспериментом, так как мы не пользовались никакими измерительными приборами — все было сделано на бумаге. В то же время в методе Монте-Карло есть элементы эксперимента. Траектории движения отдельных частиц, построенные при помощи источника случайных чисел, в принципе ничем не отличаются от траекторий, которые бы мы наблюдали на опыте, будь у нас возможность его поставить.

пластину. Квант II после трех рассеяний на электронах поглощается в результате фотоэффекта. Квант III при первом рассеянии отклоняется на большой угол и вылетает из пластины обратно.

Число квантов, которое нужно «запустить» в расчет, диктуется необходимой точностью решения задачи. Ясно, что чем меньше вероятность проникновения квантов через пластину, тем большее число испытаний нужно брать (чтобы из пластины вышло достаточно большое число квантов). Например, для того чтобы ошибка расчета была не более 10 процентов при условии, что через пластину проходит всего 1 процент квантов, нужно исследовать 10 тысяч траекторий. При меньшей вероятности проникновения нужно исследовать еще больше квантов.

Таким образом, описанный выше метод ручного счета применим лишь для небольших толщин пластин и легких материалов, ибо при увеличении толщины пластины или заряда ядер вещества сильно увеличивается необходимое число испытаний, что приводит к увеличению времени, затрачиваемого на расчет. Кванты со слишком большой или слишком малой начальной энергией исследовать таким образом невыгодно, так как они сильно поглощаются веществом.

Применение электронных счетных машин расширяет возможности метода Монте-Карло. Схема вычислений для электронной машины вполне аналогична описанной выше. При машинном счете отпадает, конечно, необходимость пользоваться таблицами и графиками. Вместо таблиц случайных чисел при счете на машинах используют так называемые псевдослучайные числа, которые генерируются в самой машине. Законы розыгрыша того или иного процесса вводятся в машину в виде программы.

Впрочем, к технике метода Монте-Карло мы еще вернемся ниже, после того как в следующем разделе рассмотрим другие применения Монте-Карло.

ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО

Метод статистических испытаний, в основе которого лежит вероятностный подход к решению задач, является незаменимым инструментом при исследовании проблем, связанных с последовательностью большого числа случайных процессов. В науке, технике, народном хозяйстве мы встречаемся с такими задачами на каждом шагу. «Истинная логика нашего мира — правильный подсчет вероятностей», — заметил великий английский физик Джеймс Максвелл. Не удивительно поэтому, что метод Монте-Карло, появившийся совсем недавно — в 1949 году, стал одним из самых распространенных методов численной математики.

Следующие числа должны выбираться по определенному закону (например, подряд, через одно из какого-либо столбца и т. д.). В нашем примере случайные числа для расчета траектории определенного кванта берутся одно за другим подряд.

После расчета траектории одного кванта возникает вопрос о выборе первого случайного числа для расчета траектории следующего кванта. Здесь можно поступить двояким образом. Во-первых, это число можно выбрать вслед за последним случайным числом предыдущего кванта по тому же закону, по которому мы выбирали случайные числа для первого кванта. В этом случае расчет траектории $(n+1)$-го кванта может быть проведен только после расчета траектории n-го кванта. Однако можно поступить иначе, а именно, первые случайные числа для разных квантов выбирать также по определенному закону (например, брать их подряд из какой-либо строки таблицы). Так именно и выбирались первые случайные числа для трех квантов, траектории которых приведены на рис. 9. В таблице представлен ход расчета траектории одного кванта (№ 1).

n	E_n (Мэв)	$\cos\Theta_n$	φ_n	l_n	δz_n	Процесс
0	0,661	1,000	0,000	(0,3590) 0,78	0,78	(0,2151) Комптоновский эффект
1	0,423	(0,4899) 0,565	(0,6410) 231	(0,9679) 4,92	3,56	(0,1434) Комптоновский эффект
2	0,361	(0,2597) 0,790	(0,7715) 278	(0,4430) 0,78	3,96	(0,1768) Комптоновский эффект
3	0,265	(0,4619) 0,490	(0,7086) 254	(0,1748) 0,21	3,97	(0,2679) Комптоновский эффект
4	0,240	(0,2315) 0,790	(0,9779) 351	(0,7096) 1,30	4,84	Вылет из пластины

Здесь n — номер столкновения. E_n и l_n — энергия и пробег кванта после n-го столкновения и δz_n — глубина проникновения кванта внутрь пластины после n-го столкновения. Нулевое столкновение $(n=0)$ соответствует попаданию кванта в пластину. В скобках приведены случайные числа, при помощи которых производился розыгрыш того или иного процесса.

Рисунок представляет собой проекции траекторий квантов на две координатные плоскости $x0z$ и $y0z$ (эти плоскости перпендикулярны друг к другу и к поверхности пластины). Видно, что судьба этих квантов совершенно различна. Квант I, претерпев четыре комптоновских рассеяния, проходит через

В связи с этим метод Монте-Карло часто называют «теоретическим экспериментом», подчеркивая, таким образом, его промежуточное положение между опытом и теорией.

Рассмотренная нами задача довольно проста. Она точно решается при помощи теории вероятностей. Однако есть много статистических явлений, воспроизвести которые на опыте трудно, а теоретическое решение просто невозможно из-за большой сложности задачи. В этом случае единственным способом решения оказывается метод Монте-Карло. В следующем разделе мы подробно рассмотрим одну из таких задач. В отличие от того вопроса, который мы только что разбирали, эта задача не учебная и иллюстративная, а практически нужная и важная. Речь пойдет о защите от радиоактивных излучений.

ЗАЩИТА ОТ ГАММА-ИЗЛУЧЕНИЯ

При любом использовании ядерной энергии — мирном или военном — возникает задача защиты от радиоактивных излучений. Действительно, физические процессы, лежащие в основе получения этого вида энергии — деление и синтез ядер, — всегда сопровождаются излучением электронов, нейтронов, гамма-квантов и других частиц. Вредное влияние, оказываемое ими на человеческий организм, обуславливает необходимость сооружения всякого рода защитных устройств. В связи с этим в последние два десятилетия возникла новая область прикладной физики — физика защиты, предметом которой является изучение законов прохождения и ослабления ядерных излучений в различных средах при заданном расположении и свойствах источников излучений и защитных сред. Конечной целью такого исследования является подбор материала, размеров и конфигурации защиты, обеспечивающих ослабление ядерных излучений до уровня, безопасного для организма.

Задача расчета защиты достаточно сложна. Конечно, можно воспользоваться принципом — «чем толще, тем лучше». Однако нужно иметь в виду, что всякое чрезмерное усиление защиты приводит к удорожанию установки, а в некоторых случаях вес защиты (например, в реакторах, установленных на движущихся объектах — самолетах, ракетах) является своего рода критическим параметром — от его величины зависит, будет ли такое устройство вообще работоспособным. В связи с этим в настоящее время большое внимание уделяется расчету оптимальных защит, т. е. нахождению наименьшего веса защиты при заданном ослаблении потока радиации.

Наиболее опасны нейтронное и гамма-излучения. Длина их пробега составляет несколько сантиметров и даже метров. С одной стороны, они могут проникать через толстые слои

вещества, а с другой — достаточно сильно поглощаются человеческим организмом. В этом разделе мы подробно остановимся на свойствах гамма-излучения и расчете прохождения его через защитные слои по методу Монте-Карло.

Гамма-лучи, так же как и видимый нами свет, представляют собой электромагнитные колебания, т. е. колебания напряженности электрического и магнитного полей, распространяющиеся в пустоте со скоростью 300 тыс. *км/сек*. Частота колебаний видимого света 10^{14} *1/сек*. Частоты, соответствующие гамма-излучению, в миллионы раз больше. Промежуточным частотам соответствуют ультрафиолетовое и рентгеновское излучения.

Гамма-излучение возникает либо при превращениях ядер (радиоактивный распад, ядерные реакции, деление ядер), либо при торможении заряженных частиц высокой энергии в среде (тормозное излучение), либо при так называемой реакции аннигиляции частиц (например, при встрече электрона и позитрона они исчезают и дают два гамма-кванта).

Различие между гамма-излучением и видимым светом не только количественное. При больших частотах у электромагнитного излучения начинают проявляться корпускулярные свойства, т. е. такое излучение может рассматриваться как поток частиц, которые называются квантами или фотонами, движущихся со скоростью света и обладающих определенной энергией и количеством движения. И та и другая величины пропорциональны частоте излучения. Энергию квантов удобно выражать в единицах, принятых в атомной физике, — электроновольтах. Такой энергией обладает электрон, ускоренный разностью потенциалов в один вольт. Наиболее часто встречаются кванты с энергией в несколько миллионов электроновольт (*Мэв*). Большинство искусственных и естественных гамма-излучателей дают кванты в интервале 0,01—10 *Мэв*. Кванты меньших энергий называются обычно рентгеновскими. При тормозном излучении могут возникать и более энергичные кванты с энергией вплоть до сотен и тысяч миллионов электроновольт.

Что же происходит с квантом, когда он попадает в какую-либо среду? Каждое вещество состоит из тяжелых положительно заряженных атомных ядер и легких отрицательных частиц — электронов. Так как квант по природе своей электромагнитен, то он должен взаимодействовать с любой заряженной частицей. Однако вследствие большой массы ядер их воздействие на кванты мало, и поэтому кванты, проходя через вещество, взаимодействуют в основном с легкими отрицательными электронами.

Попав в вещество, гамма-квант проходит некоторый путь без столкновений с электронами. Здесь в силу вступают законы случая. Одному кванту может повезти и он встретит

Далее разыгрывается тип взаимодействия кванта с веществом. При энергии кванта $E_0 = 0{,}661$ *Мэв* он с вероятностью 0,02 претерпевает фотоэффект, а вероятность комптоновского рассеивания равна 0,98. Если бы выбранное нами случайное число оказалось бы меньше 0,02, то рассматриваемый квант исчез бы в результате фотоэффекта. Но второе случайное число в таблице равно 0,2115, иначе говоря, произошло рассеяние кванта под определенным углом, который нам предстоит разыграть.

Угол рассеяния можно найти, воспользовавшись следующим случайным числом, равным 0,4899, и графиком на рис. 4. Этому числу соответствует $\cos\Theta = 0{,}565$. По формуле, связывающей косинус угла рассеяния с энергиями до и после комптоновского процесса, находим новую энергию кванта. Она равна 0,424 *Мэв* (при расчете следует помнить, что энергия покоя электрона mc^2 равна 0,511 *Мэв*).

Угол рассеяния еще не определяет направление движения кванта после комптоновского процесса. Чтобы полностью определить направление, нужно рассмотреть еще один угол — азимутальный. Ведь квант после рассеяния может лететь в любой плоскости, проходящей через траекторию нерассеянного кванта. Азимутальным углом назовем угол между плоскостью $x0z$ и плоскостью, образованной направлениями движения кванта до и после рассеяния. Азимутальное распределение квантов после рассеяния с достаточной точностью можно считать симметричным, т. е. квант с равной вероятностью может рассеяться и на угол 30° и на угол 153° и на любой другой угол. Поэтому для розыгрыша азимутального угла можно воспользоваться формулой $\varphi = A \cdot 360°$, где A — случайное число из интервала ноль — единица. Следующее в таблице случайное число равно 0,6410, поэтому $\varphi = 231°$.

Таким образом, мы получили расстояние, которое прошел квант до столкновения с электроном, направление его движения после комптоновского рассеяния и новое значение энергии кванта после рассеяния.

Если повторить процесс розыгрыша всех характеристик кванта снова, то мы получим состояние кванта после второго рассеяния и т. д.

Для того чтобы знать, когда квант покинет пластину, необходимо следить за ним до тех пор, пока сумма его смещений вдоль оси z, т. е. $\Sigma\Delta z_n$ после нескольких столкновений не станет больше толщины пластины или меньше нуля. В первом случае квант прошел через пластину, во втором — отразился от нее. И в том и другом случае мы знаем энергию вылетевшего кванта и направление его движения.

Относительно выбора случайных чисел из таблиц сделаем следующее замечание. Первое случайное число для розыгрыша пробега первого кванта выбирается из таблиц наугад.

$E_0 = 0{,}661$ *Мэв*) через железную пластину толщиной 4,5 *см*, при условии, что кванты падают перпендикулярно плоскости пластины. Нашей задачей будет определение числа квантов, прошедших через пластину и отразившихся от нее. Для решения ее нам понадобятся вероятности отдельных элементарных процессов (их мы исследовали выше) и источник случайных чисел (в качестве последнего возьмем таблицу, приведенную несколькими страницами раньше).

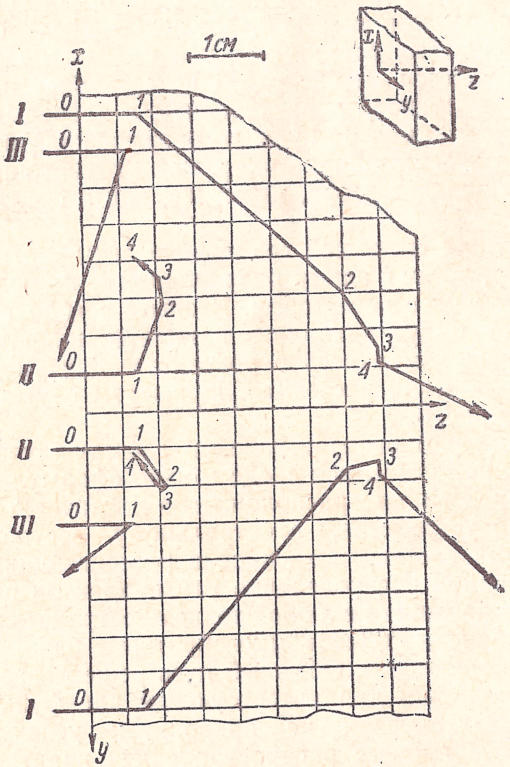


Рис. 9. Траектория трех квантов в железной пластине.

Как и при расчете случайных блужданий частиц, построим пути отдельных квантов, находя их при помощи последовательного рассмотрения случайных процессов, происходящих с квантом.

Возьмем квант № 1. Попав в пластину, он проходит некоторый путь до первого столкновения с электроном. Длину его можно определить при помощи графика на рис. 2. Каждому числу в интервале ноль — единица (вертикальная ось) можно сопоставить определенный пробег кванта (горизонтальная ось). Если приписать каждому случайному числу нашей таблицы ноль и запятую, то мы получим набор случайных чисел, равномерно распределенных в нужном нам интервале (обычно такими числами и пользуются). Первое случайное число равно 0,3590. Ему на графике соответствует пробег $l_0 = 0{,}78$ *см*. Так как квант летит вдоль оси z (см. рис. 9, изображающий пути квантов в двух проекциях), то смещение его вдоль этой оси будет $\Delta z_0 = 0{,}78$ *см*, а вдоль двух других $\Delta x_0 = \Delta y_0 = 0$. Операция сопоставления случайному числу пути определенной длины называется розыгрышем пути кванта.

электрон сразу же после попадания в вещество, другой пролетает без столкновений гораздо большее расстояние. Ясно, что если среда однородна, т. е. в каждом кубическом сантиметре находится одинаковое число электронов и ядер, то вероятность столкновения на каком-то отрезке пути Δx будет пропорциональна длине этого отрезка $\Delta w = \kappa \Delta x$. Коэффициент пропорциональности, естественно, зависит от свойств вещества и энергии квантов. Его размерность—обратная длина, например $см^{-1}$. Если N_0 квантов попадают в среду при $x = 0$, то изменение числа квантов на отрезке пути от x до $x + \Delta x$ будет

$$\Delta N = -\kappa N(x)\,\Delta x.$$

С таким уравнением мы уже встречались. Его решение $N(x) = N_0 e^{-\kappa x}$, т. е. число квантов, дошедших до точки x, экспоненциально падает с расстоянием. На пути x провзаимодействовало, таким образом, $N_0 - N(x)$ или $N_0(1 - e^{-\kappa x})$ квантов. На рис. 2 изображена кривая $1 - e^{-\kappa x}$ в зависимости от x для квантов энергии $E = 0{,}661$ *Мэв*, распространяющихся в железной пластине. Кванты такой энергии испус-

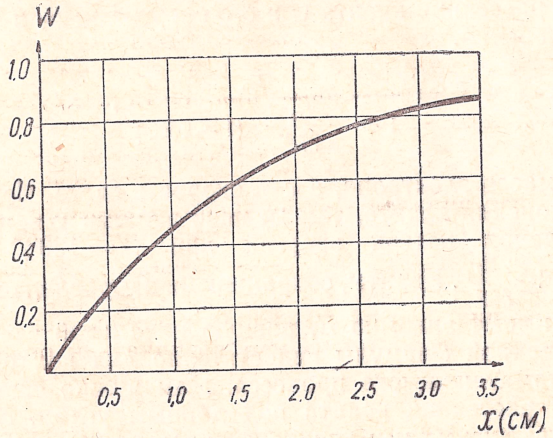


Рис. 2. График для розыгрыша пробега кванта в железе.
w — доля квантов, имеющих пробег больше x.

кает радиоактивный изотоп цезия Cs^{137}. Рассмотрение этой кривой показывает, что лишь небольшое число квантов проходит большие расстояния. Путь более 3 *см* сумеет одолеть менее 20 процентов квантов. То же самое относится и к самым малым расстояниям. Почти 80 процентов квантов имеют пробег больше 0,5 *см*. Можно вычислить средний пробег кван-

та. Он оказывается равным $1/\kappa$. Для рассматриваемого примера он равен 1,4 *см*.

Для того чтобы выяснить, как меняется средний пробег квантов с энергией, рассмотрим подробнее их взаимодействие с электронами. Наиболее вероятными являются три элементарных процесса — рассеяние электронов, или комптоновский эффект, фотоэлектрический эффект и процесс рождения пар. Первый из них приводит к изменению энергии и направления движения кванта, в результате двух других квант исчезает. Вероятности этих процессов могут быть рассчитаны на основе квантовой электродинамики — науки, изучающей взаимодействие электронов, позитронов и электромагнитных колебаний высокой частоты.

Комптоновский процесс — столкновение кванта с одним из электронов вещества. Это явление во многом подобно столкновению обычных классических частиц. Одна частица ударяет по другой, покоящейся, причем первая меняет свою энергию и направление движения, а вторая, приняв во время удара определенную энергию, начинает двигаться с некоторой скоростью. Так же, как и в обычной механике, из законов сохранения энергии и количества движения следует связь между углом рассеяния кванта Θ и его энергиями E_0 и E до и после столкновения.

$$E = \frac{E_0}{1 + \frac{E_0}{mc^2}(1 - \cos\Theta)},$$

где m — масса электрона, а c — скорость света. Чем больше угол отклонения кванта, тем меньше энергии у него остается. Максимальная потеря энергии при $\Theta = 180°$, при этом $E = E_0/1 + \frac{2E_0}{mc^2}$. Кванты, сохранившие направление движения ($\Theta = 0$), имеют энергию E, равную начальной энергии E_0.

Приведенной формулы недостаточно для полной характеристики комптоновского процесса. Нам нужно еще знать вероятность рассеяния кванта под данным углом. Это можно найти только методами квантовой электродинамики. Мы, конечно, не будем останавливаться на вычислении вероятности. Приведем просто рис. 3. На нем графически изображены вероятности рассеяния квантов большой (пунктирная кривая) и малой (сплошная кривая) энергий. Отрезок OA, проведенный из точки O до пересечения с кривой, характеризует в некотором масштабе вероятность рассеяния на данный угол Θ. Видно, что кванты больших энергий рассеиваются преимущественно под малыми углами, т. е. вперед. С уменьшением энергии рассеяние становится все более симметричным и для квантов очень малой энергии вероятности рассеяния вперед и назад сравниваются. На рис. 4 кривая, построенная

Таким образом, в детектор будет попадать большее число квантов, чем при измерениях в условиях «хорошей геометрии». Изображенные на рис. 8 условия опыта называются «плохой геометрией». Они возникают всегда, когда размеры среды, в которой распространяются гамма-кванты, сравнимы с длиной пробега.

Гамма-лучи, пришедшие в детектор после одного из нескольких рассеяний, обладают энергией, отличающейся от энергии квантов, испускаемых источником, так как в результате комптоновского процесса происходит потеря энергии. Поэтому детектор будет регистрировать кванты с непрерывным спектром, простирающимся от нуля до энергии квантов, испущенных источником. В условиях «хорошей геометрии» спектр квантов, достигших детектора, такой же, как и спектр источника.

Кроме того, в условиях «хорошей геометрии» все кванты, попадающие в детектор, летят в одном направлении — по прямой, соединяющей источник с детектором. В опыте с «плохой геометрией» в детектор будут приходить и кванты, направление движения которых изменилось в результате двух или большего числа комптоновских рассеяний. Примером служат пути квантов *б*, *в* и *г* на рис. 8.

Таким образом, задачу о распространении гамма-излучения в рассеивающей и поглощающей среде можно сформулировать следующим образом: по расположению источников излучения и защитного устройства, спектральному составу источников, химическому составу и плотности рассеивающих и поглощающих сред найти распределение гамма-квантов по энергии и направлению движения в любой точке пространства.

Теоретическое изучение процессов многократного рассеяния встречает большие трудности. Обычный путь решения задачи — составление уравнения для интересующей нас функции — даже в простейших случаях не приводит к успеху. Уравнения, описывающие процесс распространения квантов в среде, составлены, но их решение возможно только численными методами, причем это не всегда удается сделать даже при использовании электронно-счетных машин. С другой стороны, процесс многократного рассеяния очень напоминает (конечно, с большим усложнением) случайные блуждания частиц, рассмотренные нами в предыдущем разделе. Здесь мы тоже имеем последовательность элементарных актов (движение кванта без взаимодействия, рассеяние его на определенный угол или исчезновение в процессе фотоэффекта и т. д.), каждый из которых происходит с определенной вероятностью. Попробуем применить метод Монте-Карло к этой задаче.

Для конкретности рассмотрим прохождение гамма-лучей, испускаемых ядрами цезия Cs^{137} (начальная энергия

янные кванты не попадают в детектор A. Это предположение будет справедливым, если радиус цилиндра взять очень малым. В этом случае рассеянные кванты с большой вероятностью выходят за пределы цилиндра и никак не могут попасть в детектор. Рассмотренная геометрия опыта называется «хорошей геометрией».

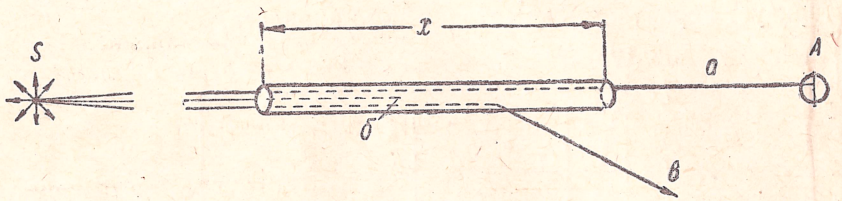


Рис. 7. Распределение квантов в условиях «хорошей геометрии».

Если на левую грань цилиндра падает N_0 квантов, то детектор отметит попадание в него $N_0 e^{-\kappa x}$ квантов, при этом мы считаем, что пучок, падающий на поглотитель, является параллельным.

Если же радиус цилиндра (рис. 8) сравним с длиной свободного пробега рассеянных квантов, то ослабление пучка γ-лучей веществом имеет иной характер. В этом случае экспоненциальный закон уже не будет выполняться. Действительно,

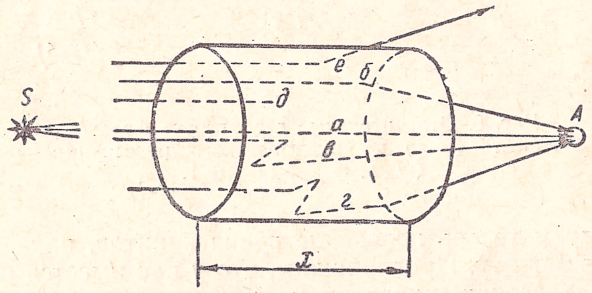


Рис. 8. Распространение квантов в условиях «плохой геометрии».

в детектор будут попадать теперь не только кванты, вылетевшие из источника в направлении SA, но и кванты, направление вылета которых не совпадает с SA. На рис. 8 изображено несколько возможных путей γ-квантов. Квант может непосредственно попасть в детектор (путь $а$), рассеяться на некоторый угол и затем попасть в детектор (путь $б$), рассеяться два или более раз перед попаданием в точку A (пути $в$ и $г$) и т. д. Некоторые кванты не попадают в детектор из-за поглощения их в веществе (путь $д$). Часть квантов, выйдя из цилиндра, не попадает в детектор (путь $е$).

для квантов, испускаемых цезием, показывает вероятность отклонения их на угол, косинус которого лежит в интервале от 1 до заданного значения $\cos\Theta$.

Фотоэлектрический эффект представляет собой процесс поглощения гамма-кванта атомом вещества. Электроны ато-

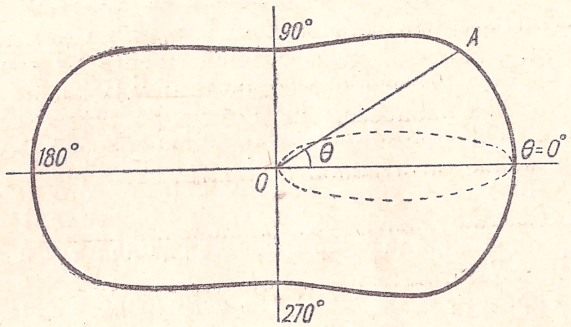


Рис. 3. Вероятность рассеяния квантов под разными углами при комптоновском процессе.

ма связаны с его ядром силами притяжения. Для того чтобы удалить один из электронов атома, нужно затратить определенную энергию, называемую энергией связи. Эту энергию может предоставить налетевший на атом квант. В результате

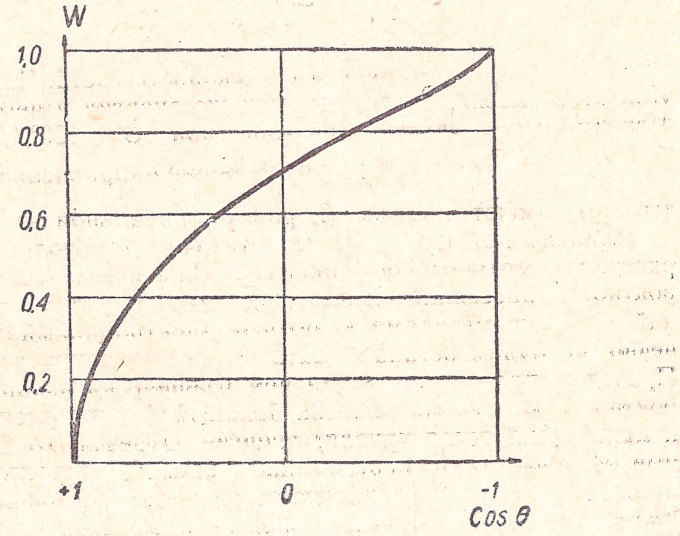


Рис. 4. График для розыгрыша угла рассеяния кванта при комптоновском процессе. ω — доля квантов, косинус угла рассеяния которых больше $\cos\Theta$.

такого процесса вся энергия кванта передается одному из электронов атома — часть ее уходит на отрыв электрона, а остаток переходит в кинетическую энергию электрона. Вероятность такого процесса тем больше, чем ближе энергия налетающего кванта к энергии связи электрона. Так как энергии связи лежат в области рентгеновских квантов, то этот процесс существен для квантов малой энергии. Повышается его роль и при увеличении заряда ядра атома, например для защитных сред, содержащих свинец, уран и т. п.

Рождение пар — эффект, противоположный аннигиляции частицы и античастицы. Он существен только для тех квантов, которые по своим энергетическим возможностям способны образовать пару электрон — позитрон. Для этого необходимо, чтобы квант обладал энергией больше 1,022 *Мэв*. При увеличении энергии и заряда ядер вещества роль этого эффекта быстро возрастает.

Таким образом, мы видим, что изменение энергии кванта приводит к тому, что вероятности различных процессов тоже меняются. При малых энергиях существенно фотоэлектрическое поглощение, при больших — процесс рождения пар. Вероятность комптоновского процесса с увеличением энергии тоже меняется, а именно, уменьшается. На рис. 5 приведен

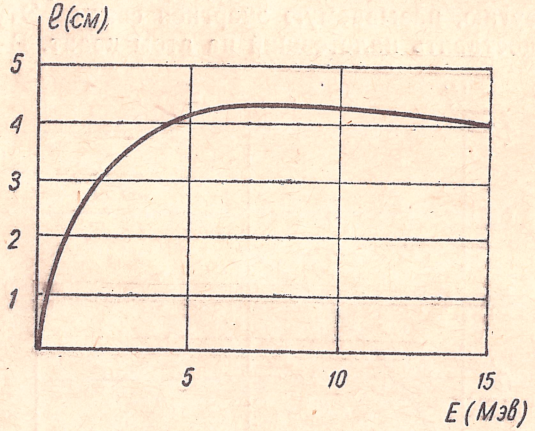


Рис. 5. Зависимость пробега квантов в железе от их энергии.

график величин пробегов для квантов различной энергии в железе. Видно, что при малых энергиях пробег уменьшается за счет фотоэлектрического поглощения, при больших — в результате процесса рождения пар. При энергии около 9 *Мэв* пробег максимален. Для квантов, энергия которых меньше миллиона электроновольт, эффект образования пар отсутствует, поэтому достаточно рассматривать только комптоновское рассеяние и фотоэлектрическое поглощение. Если квант участвует в каком-либо из этих процессов с вероятностью $w_к$ и $w_ф$, то, приняв суммарную вероятность за единицу, можно проиллюстрировать роль этих процессов при различных энергиях рисунком 6. Вертикальный отрезок между осью энергий и кривой численно равен вероятности фотоэффекта; дополняющий его до единицы отрезок (выше кривой) численно характеризует вероятность комптоновского процесса.

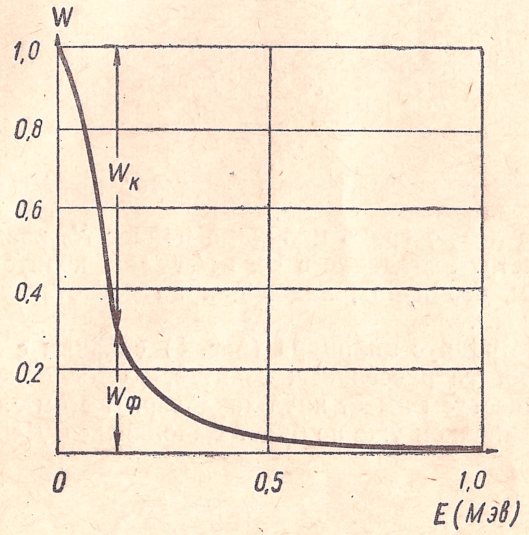


Рис. 6. Относительные вероятности фотоэффекта ($w_ф$) и комптоновского рассеяния ($w_к$), $w_ф + w_к = 1$.

Исследуем теперь поведение пучка квантов, падающих на некоторую защиту. Предположим, что у нас имеется источник монохроматических γ-квантов и детектор, регистрирующий число квантов, попавших в него. Рассмотрим прохождение γ-квантов через слой вещества некоторой толщины x (рис. 7). Гамма-лучи, вышедшие из источника S в направлении SA, попадают на поглотитель, выполненный в виде тонкого цилиндра. Кванты, попавшие в цилиндр, могут либо пройти через вещество без взаимодействия с его электронами и ядрами, либо испытать один из трех рассмотренных выше процессов. В первом случае они попадают в детектор A (путь *а*). Во втором — кванты либо поглощаются в результате фотоэффекта или процесса образования пары электрон — позитрон (путь *б*), либо рассеиваются на некоторый угол в процессе комптоновского эффекта (путь *в*). Будем считать, что рассе-